



TESIS DOCTORAL

**Propagación y dispersión de ondas acústicas a
través de nubes de microburbujas.**

Aplicación al modelado de
agentes de contraste ultrasónicos.

Autor:

Miguel Ángel PARRALES BORRERO

Directores:

Dr. Juan Manuel FERNÁNDEZ GARCÍA

Dr. Miguel PÉREZ-SABORID SÁNCHEZ-PASTOR

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

14 de octubre de 2013

TESIS DOCTORAL

PROPAGACIÓN Y DISPERSIÓN DE ONDAS ACÚSTICAS A TRAVÉS DE NUBES DE MICROBURBUJAS.

APLICACIÓN AL MODELADO DE AGENTES DE CONTRASTE ULTRASÓNICOS.

Memoria presentada por

Miguel Ángel Parrales Borrero

para optar al grado de Doctor en Ingeniería.

Directores:

Dr. Juan Manuel Fernández García

Dr. Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

14 de octubre de 2013

Índice general

Resumen	V
Abstract	VII
1. Introducción	1
1.1. Introducción a los UCA	1
1.2. Antecedentes	3
1.3. Hipótesis y objetivos	4
1.4. Metodología	7
Bibliografía	8
2. Dispersión acústica en medios lineales no complejos	11
2.1. Introducción	11
2.2. Formulación	12
2.3. Efecto de enfoque	15
2.4. Ley de refracción	18
2.4.1. Haz armónico incidente	19
2.4.2. Paquete de ondas incidente	20
2.5. Conclusiones	22
Bibliografía	22
3. Análisis de la dinámica de microburbujas	25
3.1. Introducción	25
3.2. Dinámica de burbujas	26
3.2.1. Problema exterior: movimiento de la fase líquida	26
3.2.2. Ecuaciones para las oscilaciones radiales	30
3.2.3. Problema interior: movimiento de la fase gaseosa	31
3.2.4. Comportamiento termodinámico linealizado	34
3.3. Dinámica lineal de burbujas	36
3.3.1. Oscilaciones lineales y frecuencia natural	37
3.3.2. Coeficiente de amortiguamiento	39
3.3.3. Umbral del comportamiento no lineal	41
3.3.4. Ecuación de Rayleigh-Plesset corregida	42
3.4. Radiación acústica, dispersión y absorción	44
3.4.1. Sección eficaz de dispersión	44
3.4.2. Sección eficaz de absorción y extinción	46
3.5. Estabilidad y efectos de difusión másica	47
3.5.1. Difusión pasiva	48

3.5.2. Difusión rectificada	48
3.6. Conclusiones	50
Bibliografía	50
4. Generación y caracterización acústica de UCA monodispersos	53
4.1. Introducción	53
4.2. Dinámica de burbujas encapsuladas	54
4.2.1. Modelo viscoelástico Kelvin-Voigt	55
4.2.2. Comportamiento acústico lineal	56
4.3. Materiales y métodos	58
4.3.1. Generación de microburbujas monodispersas	58
4.3.2. Caracterización acústica	60
4.4. Resultados y discusión	62
4.5. Conclusiones	65
Bibliografía	66
5. Dinámica acoplada de microburbujas y dispersión múltiple	71
5.1. Introducción	71
5.2. Dinámica acoplada de burbujas	72
5.2.1. Modos de oscilaciones colectivas	74
5.2.2. Oscilaciones colectivas forzadas	78
5.2.3. Aproximación de medio continuo	80
5.2.4. Campos de oscilaciones resonantes	82
5.3. Dispersión múltiple en nubes de burbujas	86
5.3.1. Sección eficaz de dispersión	89
5.3.2. Teoría del Medio Efectivo	92
5.3.3. Dispersión en nubes acústicamente diluidas	97
5.4. Propagación de ondas a través de nubes de burbujas	100
5.5. Conclusiones	103
Bibliografía	105
6. Fuerzas de Bjerknes en nubes de microburbujas	109
6.1. Introducción	109
6.2. Teoría clásica de las fuerzas de Bjerknes	110
6.2.1. Fuerza primaria de Bjerknes	110
6.2.2. Fuerza secundaria de Bjerknes	112
6.3. Interacción mutua entre pares de burbujas	114
6.3.1. Oscilaciones lineales acopladas	115
6.3.2. Movimiento de traslación	117
6.4. Fenómenos de <i>clustering</i> en nubes de microburbujas	127
6.5. Conclusiones	129
Bibliografía	130
Conclusiones	I
Conclusions	III

Resumen

La posible aplicación de medios de contraste en la diagnosis médica por ultrasonidos fue descrita por primera vez hace 40 años. Hoy en día, los agentes de contraste ultrasónicos (UCA), formados por microburbujas encapsuladas, son ampliamente utilizados para realizar diagnósticos clínicos especializados, de ahí la importancia del estudio de su comportamiento ante excitaciones acústicas. Por tanto, la optimización de las técnicas de contraste ecográfico, así como la generación y caracterización de estos agentes, permitirá dotar finalmente a esta herramienta clínica de las ventajas necesarias que le harán convertirse en una solución eficaz para el diagnóstico, e incluso tratamiento, de diversas patologías. Así pues, en el Capítulo 1 se lleva a cabo una introducción a los UCA, exponiendo los objetivos y metodología seguida para el desarrollo de esta tesis doctoral.

En el aprendizaje y estudio de los fenómenos acústicos y ondulatorios en general, es imprescindible el análisis de las ecuaciones que modelan la propagación de ondas en medios homogéneos. Bajo la hipótesis de acústica lineal, muy común en la práctica, las ecuaciones de Navier-Stokes revelan que cualquier perturbación en la presión local de un fluido se propaga como una onda a la velocidad del sonido. Este resultado nos permite modelar, en el Capítulo 2, la radiación producida por un transductor piezoeléctrico con el fin de simular la propagación de un haz acústico en un medio fluido. Cuando en este medio existe alguna región homogénea con unas propiedades diferentes, aparece el fenómeno de dispersión acústica. Como consecuencia, la energía del haz es dispersada en distintas direcciones y con distintas intensidades, las cuales vienen marcadas por la diferencia entre las propiedades de los dos medios. Los conceptos y métodos usados para resolver este tipo de problemas serán utilizados posteriormente para analizar la propagación y dispersión de ondas acústicas a través de nubes de burbujas, las cuales constituyen medios no homogéneos.

Antes de analizar la dispersión que producen estas nubes, es necesario estudiar la dinámica de las burbujas mientras son excitadas acústicamente. De esta manera, en el Capítulo 3 se realiza una revisión exhaustiva de la formulación y de las ecuaciones que modelan las oscilaciones radiales de estas burbujas. Por otro lado, mediante un análisis lineal, se ha estudiado el comportamiento termodinámico del gas en el interior de las burbujas, permitiéndonos finalmente plantear una formulación muy precisa para las oscilaciones de pequeña amplitud. Este resultado nos permite caracterizar el espectro de oscilaciones, las cuales se relacionan con las propiedades de dispersión acústica de las burbujas. Los resultados revelan que las burbujas oscilan de forma resonante para determinadas frecuencias, lo que implica una elevada dispersión de energía acústica. Es esta propiedad ecogénica la que convierte a las microburbujas en un excepcional agente de contraste ultrasónico para su uso en aplicaciones clínicas. No obstante, para que estas burbujas sean estables en cuanto a su tamaño, necesitan ser recubiertas para evitar su disolución y eventual desaparición. Una vez analizada la dinámica de las mi-

croburbujas y justificada su aplicabilidad clínica, se ha llevado a cabo, en el Capítulo 4, la caracterización experimental de sus propiedades acústicas. Así pues, usando técnicas microfluídicas, se han generado suspensiones de microburbujas monodispersas recubiertas con fosfolípidos. El montaje experimental propuesto permite medir la frecuencia de resonancia de estas burbujas a través del espectro de atenuación de las muestras. Con este resultado, y conocido el tamaño medio de burbuja, podremos inferir las propiedades mecánicas que caracterizan al recubrimiento de forma experimental.

Hasta ahora, las burbujas han sido tratadas como entes aislados, cuya dinámica es independiente de la presencia de burbujas vecinas. Sin embargo, para suspensiones o nubes con una densidad de burbujas elevada, aparecen efectos de acoplamiento que modifican sus oscilaciones, y por tanto, la dispersión total. Estos efectos de interacción burbuja-burbuja dan lugar a fenómenos colectivos, los cuales son analizados de forma rigurosa en el Capítulo 5. Así pues, en determinadas condiciones, las nubes pueden oscilar de forma colectiva siguiendo unos modos resonantes concretos. Para el cálculo de las oscilaciones acopladas y de la dispersión múltiple que aparece en consecuencia, se ha desarrollado un código numérico que permite obtener el campo de oscilaciones y presiones acústicas en todos los puntos de la nube. Esto nos permite caracterizar la dispersión acústica total en función de los parámetros que la definen. Finalmente, considerando a la nube como un medio efectivo homogéneo, y aplicando las técnicas afianzadas en la primera parte del desarrollo de este trabajo, se han calculado analíticamente las oscilaciones colectivas y la dispersión acústica total, resultados que han sido comparados con los obtenidos numéricamente.

Sin embargo, el comportamiento real de las burbujas dentro de una nube es más complejo debido a que sus posiciones relativas varían como efecto de la excitación acústica. Las fuerzas que inducen este movimiento se conocen como fuerzas de Bjerknes, y son analizadas de forma teórica en el Capítulo 6. Así pues, se ha estudiado la interacción mutua entre pares de burbujas con el fin de calcular el movimiento relativo entre ellas. Finalmente se ha implementado un algoritmo que predice la formación de agrupaciones (*clustering*) de burbujas en nubes excitadas acústicamente, fenómeno ampliamente observado en la práctica.

Abstract

The potential application of contrast agents in ultrasound medical diagnosis was first described 40 years ago. Today, ultrasound contrast agents (UCA), which consist of encapsulated microbubbles, are widely used for specialized clinical diagnostics, hence the importance of the study of their behavior under acoustic excitations. Therefore, the optimization of medical techniques and procedures, as well as the generation and characterization of new agents, will provide to this clinical tool the advantages to become an effective solution for diagnosis and treatment of several pathologies. Thus, in Chapter 1 we carry out an introduction to UCA, stating the objectives and methodology that has guided the development of this dissertation.

In the study of acoustic and wave phenomena, is essential to first analyze the equations that govern the wave propagation in homogeneous media. Under the hypothesis of linear acoustics, the Navier-Stokes equations show that any disturbance in the local pressure of a fluid propagates at the speed of sound. This finding allows us to model, in Chapter 2, the radiation generated by a piezoelectric transducer in order to simulate the propagation of an acoustic beam. When in this environment there exists a homogeneous region with different properties, the beam energy is scattered to different directions with different intensities. The concepts and methods employed to solve these kind of problems will be recover to analyze the propagation and scattering of acoustic waves through microbubble clouds.

Before analyzing the scattering from these clouds, it is necessary to study the bubble dynamics while they are driven acoustically. Thus, in Chapter 3, a deep review of the formulation and the equations that model the radial oscillations of these bubbles has been performed. Furthermore, by using a linear analysis, we studied the thermodynamic behavior of the gas inside the bubbles. Such analysis brings a very accurate formulation for small amplitude oscillations. This finding allows us to characterize the spectrum of the oscillations, which is closely related to the acoustical properties of the bubbles. The results reveal that bubbles oscillate resonantly while they are driven at certain frequencies, which implies a very high acoustic energy scattering. Indeed, this echogenic property makes the microbubbles to be a unique contrast agent for clinical applications. However, these bubbles must be coated (stabilized) to prevent a rapid dissolution. Once analyzed the microbubble dynamics and justified their clinical applicability, we carry out the experimental characterization of its acoustic properties in Chapter 4. So, by using microfluidic techniques, we have generated monodisperse microbubbles suspensions coated with phospholipids. The proposed experimental setup enables the measurement of the bubbles' resonance frequency through the attenuation spectrum of the samples. With this result, we can finally infer experimentally the mechanical properties which characterize the lipid coating.

Until now, the bubbles have been treated as isolated entities whose dynamic is inde-

pendent of the presence of neighboring bubbles. However, when dealing with suspensions or clouds with a higher bubble density, the coupling effects could modify the oscillations and the total acoustic scattering. These bubble-bubble interactions give rise to collective phenomena within the cloud, which are rigorously analyzed in Chapter 5. Thus, under certain conditions, clouds can oscillate collectively following a specific resonant mode. In order to calculate the coupled oscillations and the multiple scattering, a numeric code has been developed. The code is able to get numerically the oscillations of each bubble and the sound pressure field in every point of the cloud. This allows us to characterize the total acoustic scattering as a function of the parameters that define the cloud and the excitation. Finally, considering that the cloud can be modeled as an effective homogeneous medium, we have calculated analytically both the collective oscillations and the total acoustic scattering with an excellent accuracy.

However, the real behavior of the bubbles inside a cloud is more complex because their relative positions may vary under the effect of the acoustic excitation. The forces that drive this movement are known as Bjerknes forces, and they are theoretically analyzed in Chapter 6. Thus, we studied the mutual interaction between pairs of bubbles in order to calculate the relative displacement therebetween. To conclude this study, we have implemented a numerical algorithm that predicts the formation of bubble clusters within acoustically excited clouds, a phenomenon widely observed in experiments.

Capítulo 1

Introducción

La elaboración de esta tesis forma parte del trabajo de investigación asociado al Proyecto del Plan Nacional de I+D+i *Mecanismos de generación de microgotas, burbujas y espumas con aplicaciones a procesos industriales, farmacología y medicina*, desarrollado en el Grupo de Investigación de Mecánica de Fluidos (<http://www.gimf.us.es/>) perteneciente a la Universidad de Sevilla. La labor de investigación desarrollada se centra en el modelado y análisis teórico, numérico y experimental de la excitación, propagación y dispersión acústica a través de nubes de microburbujas, con el fin de caracterizar el comportamiento de los agentes de contraste ultrasónicos (UCA) y estudiar su aplicabilidad clínica.

1.1. Introducción a los UCA

El desarrollo de los medios de contraste aplicados a la exploración por ultrasonidos ha sido lento y esporádico. En los últimos tiempos ha habido grandes avances en la producción de UCA con diferentes características, y en el estudio de las técnicas de empleo de los mismos. Hoy en día estos agentes de contraste (microburbujas encapsuladas) son ampliamente utilizados para realizar diagnósticos especializados, de ahí la importancia del conocimiento de su modo de empleo. Por otro lado, la exploración por ultrasonidos es una técnica no invasiva, con un equipamiento sencillo, compacto y de bajo coste, el cual ha venido desarrollandose durante décadas. Sin embargo, presenta ciertas desventajas a la hora de hacer evaluaciones precisas a la vista de las imágenes ecográficas debido a la alta intensidad de ruido provocado por los múltiples ecos en tejidos circundantes a la zona a explorar. Esto hace que la optimización de las técnicas de contraste ultrasónico, así como la generación y caracterización de estos agentes, sea de gran interés para finalmente dotar a esta herramienta clínica de las ventajas necesarias para convertirse en una solución eficaz para el diagnóstico, e incluso tratamiento, de diversas patologías [Dijkmans (2004), Evan (2004), Ferrara (2007)].

La principal aplicación de los UCA para el diagnóstico médico es su uso como realzadores del contraste en las imágenes ecocardiográficas. Debido a la disparidad de densidades y compresibilidad entre las microburbujas y la sangre, la ecogenidad de esta última se ve incrementada con respecto a los tejidos que componen la cavidad cardíaca, permitiendo visualizar claramente el estado del flujo sanguíneo y reconocer patologías derivadas. Por otro lado, este aumento de las propiedades ecogénicas de la sangre permite la detección por imágenes ecográficas de problemas de perfusión o irrigación en

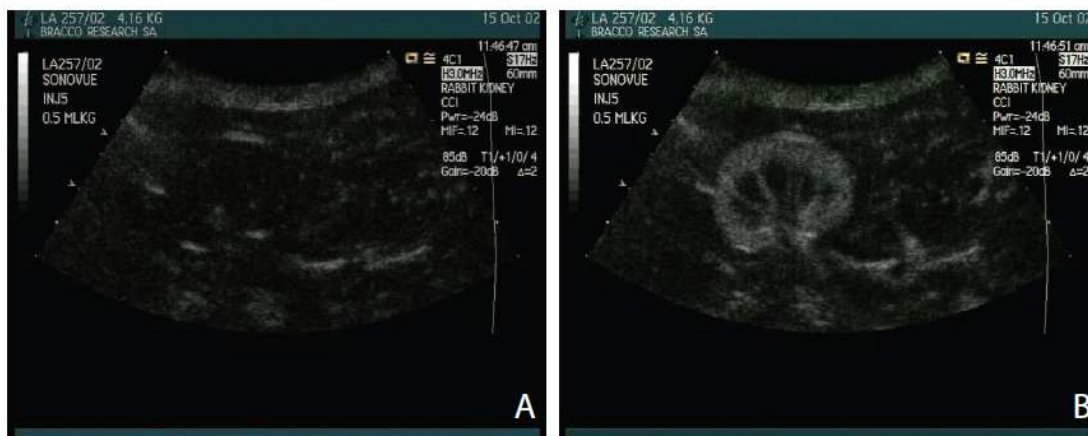


Figura 1.1: Imagen ecográfica de un riñón de conejo. A) Imagen previa a la inyección de agentes de contraste ultrasónicos. B) Imagen posterior a la inyección de UCA. Cortesía de Bracco Research S.A.

distintos tejidos, como el hepático, pudiendo diagnosticar posibles trombosis o coágulos, aneurismas, o hemorragias. Por último, una de las aplicaciones clínicas, actualmente en estudio y desarrollo, de los UCA es su uso para la medición no invasiva de la presión sanguínea en diferentes puntos del sistema circulatorio, como en la aorta o en el corazón. De hecho, hoy en día la técnica estándar para realizar estas mediciones es mediante la introducción de un catéter, lo cual requiere un procedimiento quirúrgico. Aunque existan algunas técnicas no invasivas, basadas en la aplicación de la ecuación modificada de Bernoulli sobre los datos obtenidos en las ecografías Doppler, su precisión no es suficiente para muchos propósitos clínicos.

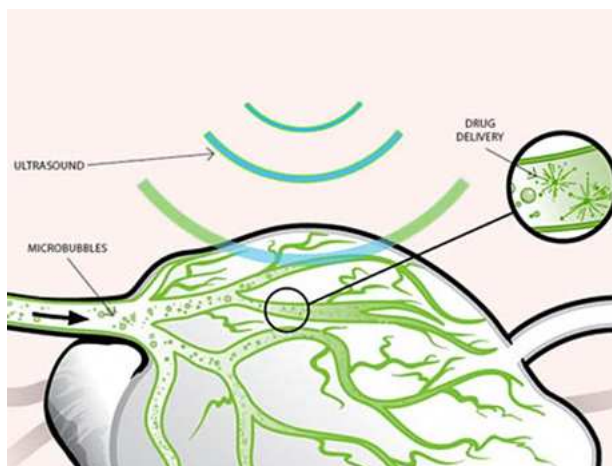


Figura 1.2: Esquema de la liberación controlada de fármacos usando microburbujas como agentes de contraste ultrasónicos.

En cuanto a las aplicaciones de los UCA para el tratamiento de patologías y enfermedades, podemos destacar la detección y mejora en la destrucción de coágulos mediante la inyección del fenómeno de cavitación. El uso de agentes de contraste permite monitorizar en tiempo real el estado del flujo sanguíneo en la zona a tratar. Una vez detectado y localizado el problema, las microburbujas más cercanas se excitan por encima del

umbral de cavitación inercial para provocar su implosión y la generación de una onda de choque asociada, la cual será la encargada de destruir el coágulo. Por otro lado, los agentes de contraste pueden ser dotados de material genético previamente seleccionado, y equipados de principios activos ligados de forma covalente al recubrimiento de fosfolípidos. De esta manera las microburbujas se comportan como portadores de genes (*gene delivery*) y de fármacos (*drug delivery*), los cuales son liberados de forma localizada en zonas específicas del cuerpo. La deposición de estos fármacos y material genético se produce igualmente por cavitación inercial, mientras que la absorción de estas moléculas por parte de las células de los tejidos a tratar es realizada por los procesos de sonoporación (creación de poros en la membrana celular) provocados tanto por el *microstreaming*, como por las variaciones de presión, ambos fenómenos asociados a las oscilaciones de las microburbujas mientras son excitadas de forma externa por el equipo de ultrasonidos.

1.2. Antecedentes

La posible aplicación del contraste en ecocardiografía fue ya descrita en 1968 por Gremiak et. al. [Gremiak (1968)] La mayoría de los contrastes están formados por microburbujas encapsuladas, llenas de gases pesados (poco difusibles), las cuales son capaces de generar un aumento en la señal ecocardiográfica, lo que potencia la información proveniente del ultrasonido. El motivo por el cual estas suspensiones de gases en líquidos producen realce significativo en las imágenes ultrasónicas se debe a que las interfaces físicas entre elementos de tan distinta densidad acústica, como el líquido y el gas, son intensamente reflectantes para el ultrasonido, varias veces más que las interfaces sólido/líquido que habitualmente se utilizan para generar las imágenes que se obtienen en la práctica clínica de la ecocardiografía. La generación de las microburbujas que componen el medio de contraste de uso comercial se ha venido realizando según técnicas de agitación mecánica y sonicación, las cuales son una forma muy barata, rápida y sencilla de generar unas emulsiones altamente concentradas de microburbujas. La principal desventaja de estas técnicas es la imposibilidad de controlar la distribución de tamaños de las burbujas resultantes, pudiendo generarse en una misma solución, microburbujas de entre $0.1\ \mu\text{m}$, hasta $20\ \mu\text{m}$ de diámetro.

A la vista de la rápida disolución de las microburbujas, distintos materiales encapsulantes se han venido usando para estabilizar el tamaño medio y el contenido de las burbujas que compone los agentes de contraste, lograndolo gracias a la eliminación de la sobrepresión debida a la tensión superficial, y a la imposición de una resistencia a la permeabilidad del gas. Así pues, los primeros agentes de contraste comerciales fueron recubiertos por una capa de proteína de albúmina (*Albunex*, *Optison*). Sin embargo, los UCA con recubrimientos de fosfolípidos son los más comunes para su uso en imágenes ultrasónicas (*Definity*, *SonoVue*). Las microburbujas estabilizadas por lípidos son fáciles de generar, biocompatibles y muy ecogénicas. La necesaria inclusión de los distintos materiales encapsulantes en la morfología de la microburbuja modifica el comportamiento dinámico y ecogénico esperado de esta, por lo que es imprescindible la caracterización mecánica de estos recubrimientos.

La caracterización de los UCA comienza por establecer un modelo mecánico para el recubrimiento que estabiliza a la microburbuja. Los modelos que primero se desarrollaron fueron los de N. de Jong [de Jong (1992), de Jong (1993)] y Church [Church (1995)],

los cuales asumen un comportamiento viscoelástico y un espesor finito para la membrana, dándole aplicación para recubrimientos proteínicos y poliméricos. Una vez se fueron desarrollando los encapsulamientos por monocapas de fosfolípidos, los modelos se fueron adaptando con los trabajos de Sarkar [Chatterjee (2003), Sarkar (2005)], Dayton [Doinikov (2007)] y Marmottant [Marmottant (2005)], siendo este último uno de los más completos ya que tiene en cuenta el comportamiento no lineal de la membrana lipídica. Una vez planteado el modelo del recubrimiento, se fueron sucediendo distintas técnicas experimentales con el fin de obtener valores empíricos que definieran al material viscoelástico. Estas técnicas están basadas en la medida del espectro de atenuación y *backscattering* de distintas muestras de agentes de contraste, excitadas por pulsos ultrasónicos de gran ancho de banda, y a partir del cual se pueden obtener las frecuencias de resonancia y factores de amortiguamiento característicos de las microburbujas.

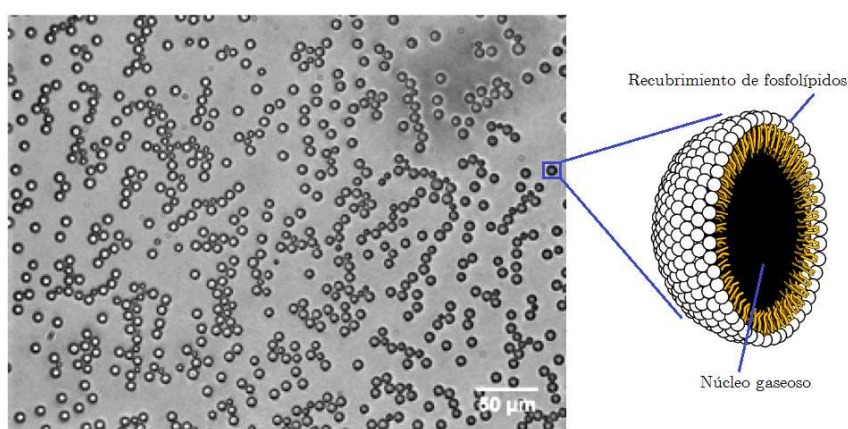


Figura 1.3: Micrografía de una muestra de agentes de contraste monodispersos (Y. Gong y T. Porter, NanoMedAl, Boston University). Detalle esquematizado de una microburbuja encapsulada por una monocapa de fosfolípidos (M. Overvelde, Physics of Fluids, University of Twente).

Es importante, a la hora de establecer los modelos con los que predecir la interacción entre el ultrasonido y las microburbujas, tener en cuenta los efectos de oscilaciones y resonancias colectivas para ciertos niveles de densidad de burbujas en el contraste [Zeravivic (2011)]. A este nivel, la propagación de las ondas dentro de la muestra de microburbujas se ve afectada debido al acoplamiento acústico entre las burbujas, con lo que el espectro de atenuación y dispersión total varía de forma apreciable, alcanzándose unas frecuencias de resonancia muy por debajo de las previstas. Los trabajos previos que modelan la propagación acústica en este régimen se centran en el estudio del comportamiento colectivo de nubes de cavitación [Arora (2007), Fuster (2011)]. Sin embargo, en la caracterización de agentes de contraste, dada su baja densidad en principio, no se han desarrollado modelos que predigan el comportamiento acústico de las nubes de microburbujas cuando aparecen los efectos de dispersión múltiple, los cuales pueden ser importantes si trabajamos con nubes monodispersas (burbujas del mismo tamaño).

1.3. Hipótesis y objetivos

Para ser una herramienta clínica efectiva, las microburbujas, una vez inyectadas en el cuerpo vía intravenosa, deben sobrevivir al pasaje a través de la circulación cardio-

pulmonar: los capilares pulmonares, en su porción más estrecha, presentan una sección de diámetro característico de $12 \mu\text{m}$. También es de gran importancia que los gases contenidos no difundan a través de la barrera alvéolo-capilar. Es por ello que las sustancias de contraste ultrasónico de utilidad clínica serán aquellas que contengan microburbujas de un tamaño no mayor de $10 \mu\text{m}$ y que además contengan gases poco difusibles y bien estabilizados por recubrimientos (fosfolípidos o polímeros) que no les permitan difundir libremente y, al mismo tiempo, garanticen la estabilidad de las mismas en cuanto a su tamaño.

La correcta caracterización de la energía dispersada (en forma de eco) por las microburbujas que componen el medio de contraste, pasa por el análisis de la dinámica de las oscilaciones de estas. Así pues, uno de los planteamientos más importantes dentro de la dinámica de las burbujas es la dependencia de su radio R con la presión acústica p_a que la rodea. De esta manera, se obtiene la ecuación diferencial (1.1), propuesta en su forma original por Lord Rayleigh [Rayleigh (1917)], y completada posteriormente por M. Plesset [Plesset (1949)] en los años 40,

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_\infty}(p_L - p_a - p_\infty), \quad (1.1)$$

siendo p_∞ la presión de equilibrio del líquido, cuya densidad es ρ_∞ , y p_L la presión que ejerce el líquido justo en la cara externa de la burbuja. La hipótesis principal de la cual parte este resultado es suponer que la simetría esférica de la burbuja se conserva en todo instante, lo que es coherente para excitaciones de longitudes de onda largas, mucho mayores que el radio de equilibrio R_o . Tras una análisis lineal de esta ecuación, se comprueba que la burbuja se comporta como un oscilador armónico, cuya frecuencia natural f_n corresponde, de forma aproximada, con lo predicho en 1933 por Minnaert [Minnaert (1933)], es decir

$$f_n \simeq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\kappa p_\infty}{\rho_\infty R_o^2}}, \quad (1.2)$$

donde κ es la constante politrópica del gas que compone la microburbuja. Así pues, una microburbuja excitada según su frecuencia natural oscilará de forma resonante, maximizando por tanto su respuesta ecogénica. Como se comprueba en (1.2), para burbujas menores de $8 \mu\text{m}$, la frecuencia de resonancia característica está en el rango de los MHz, con lo cual su aplicabilidad en la exploración por ultrasonidos, usando equipamiento ecográfico estándar, es adecuada e inmediata.

Por otro lado, la idea en la cual se sustenta el método de la medida no invasiva de la presión sanguínea fue propuesta en los años 70 por Fairbank and Scully [Fairbank (1977)]: la frecuencia de resonancia de una burbuja con un radio dado, depende de la presión del líquido que le rodea, p_∞ . Por tanto, si el radio de la burbuja, así como las propiedades del gas y del líquido, son conocidos con exactitud, existe una relación directa entre la frecuencia de resonancia y la presión de este último. A pesar de la simplicidad de esta idea, sigue siendo muy difícil ponerla en práctica en una aplicación clínica. La razón principal, es que las burbujas necesitan tener a una distribución de tamaños uniforme. Como demuestran recientes cálculos y experimentos realizados por el Grupo de Investigación de Mecánica de Fluidos (<http://fluidos.uc3m.es/>) perteneciente la Universidad Carlos III de Madrid, la resolución con la cual la presión puede ser medida está acotada por el *índice de polidispersión* (PDI) de la nube [Medina-Palomo (2010)],

poniendo de manifiesto que, para que esta técnica resulte práctica en aplicaciones clínicas (resoluciones mayores a 5 mmHg), se necesita producir poblaciones de burbujas con un PDI lo más bajo posible (inferiores a un 5 %).

Como vemos, la polidispersión en el tamaño de las burbujas presentes en el medio de contraste nos introduce siempre una incertidumbre tanto en el planteamiento y diseño de las aplicaciones, como en las medidas que pretendamos hacer. Esto hace que sea necesario conocer de manera exacta cómo están distribuidos los diámetros de las microburbujas que forman la nube. Aún así, los resultados obtenidos no estarán optimizados ya que el realce máximo del eco se produce para una frecuencia de resonancia determinada, la cual depende del tamaño de la burbuja. Es por ello que el uso de agentes de contraste monodispersos se hace imprescindible a la hora de optimizar las técnicas de caracterización mecánica y las aplicaciones clínicas -imágenes ecográficas, medidas no invasivas y tratamiento de patologías- debido a la alta precisión y control que se alcanzaría sobre las señales medidas. Por tanto, una vez lograda la producción en masa de burbujas monodispersas [Castro-Hernández (2011)] (como objetivo del proyecto DPI2008-06624-C03-01 desarrollado en el Grupo de Investigación de Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla), y dado que nuestro propósito es producirlas para emplearlas como UCA, analizaremos en detalle la respuesta de nubes de microburbujas monodispersas excitadas acústicamente. Debido a la complejidad técnica en la producción de forma controlada de nubes monodispersas, es difícil encontrar resultados experimentales sobre esta materia a pesar de ser esencial para las aplicaciones de las microburbujas como agentes de contrastes ultrasónicos. Los objetivos de esta tesis se centran en el análisis teórico, numérico y experimental de los siguientes fenómenos: la interacción acústica entre microburbujas, la dinámica de burbujas encapsuladas y las fuerzas de Bjerknes.

Interacción acústica entre burbujas. El uso de poblaciones de burbujas con bajos PDI no elimina, por sí solo, otras dificultades técnicas que impedirían la aplicación del método en los procedimientos clínicos más comunes. Uno de los efectos indeseables que aparece, que dificulta el análisis y modelado del fenómeno físico, es la interacción acústica entre las burbujas [Parrales (2010)]. De hecho, a pesar de que la determinación experimental del espectro acústico de una sola microburbuja es técnicamente posible, para obtener relaciones de señal-ruido prácticas para propósitos clínicos, se necesitan nubes con concentraciones relativamente altas de UCA. Esto hace que la forma esperada del espectro de atenuación y dispersión, así como la localización de la frecuencia de resonancia en cada muestra, varíe de manera importante. Por tanto, la interacción acústica burbuja-burbuja emerge como un punto crítico que necesita ser considerado si se requiere una alta precisión en las medidas.

Dinámica de burbujas encapsuladas. La complejidad en el estudio de la respuesta dinámica de los materiales típicos que componen el recubrimiento de los UCA añade una dificultad extraordinaria al análisis del comportamiento acústico de las microburbujas, introduciendo cierta incertidumbre en los planteamientos debido a que no se conoce en detalle la física que modela estas membranas a nivel molecular. Es por eso que el correcto modelado de la dinámica de las microburbujas encapsuladas es clave para la futura caracterización y uso clínico de los agentes de contraste ultrasónicos. Bajo las hipótesis que definen al recubrimiento de fosfolípidos como un material viscoelástico

[Marmottant (2005)], se pretenden establecer sus propiedades mecánicas mediante la medida experimental de la respuesta acústica de las microburbujas. Así pues, un vez dominadas las técnicas microfluídicas que permiten la generación controlada de burbujas monodispersas encapsuladas, se diseñará un montaje experimental con el que seremos capaces de estimar, de forma indirecta, las propiedades viscoelásticas de la membrana lipídica.

Fuerzas primarias y secundarias de Bjerknes. Otro efecto indeseado que surge cuando la nube se excita acústicamente se debe a las fuerzas primarias y secundarias de Bjerknes [Leighton (1994)]. Cuando un grupo de burbujas oscila bajo la presencia de un campo acústico, las fuerzas de Bjerknes hacen que estas se acerquen o se alejen dependiendo de sus propiedades, excitación acústica y la distancia inicial que las separa. En el caso de que las burbujas se atraigan, estas tenderán a coalescer o, si tienen recubrimiento como los UCA, a formar agrupaciones (*clusters*), fenómeno que actualmente posee un alto interés en investigación básica. Una consecuencia de esto es que, en aplicaciones donde una nube densa de burbujas es excitada con un ratio elevado de repeticiones pulsatorias, la agrupación de burbujas prevalecerá eventualmente incluso si la población de burbujas es monodispersa. En este caso, es necesario incluir estos efectos en el estudio de las propiedades espectrales de la nube de burbujas, cuya configuración original se verá modificada a medida que estas fuerzas actúan.

1.4. Metodología

El análisis de la propagación de ondas a través de nubes de microburbujas requiere, en primer lugar, un profundo estudio teórico que permita comprender tanto la dinámica de burbujas excitadas acústicamente y los distintos modos de resonancias colectivos que aparecen, como las fuerzas que surgen a partir del campo acústico total creado tras la interacción ultrasonido-burbujas. Una vez realizado los planteamientos teóricos, se llevará a cabo un análisis numérico de los fenómenos lineales involucrados, descritos anteriormente. Para ello, se ha desarrollado un modelo numérico para la nube de burbujas, actualmente disponible en el Grupo de Investigación Mecánica de Fluidos de la Universidad de Sevilla, cuya formulación describe a la nube como una distribución espacial aleatoria de monopolos acústicos independientes [Parrales (2010)]. Sin embargo, como se ha explicado, el comportamiento real de la nube es complejo debido a la interacción acústica entre las burbujas, por lo que la intensidad de radiación de cada monopolo depende fuertemente de las demás (acoplamiento acústico). Una vez implementado este modelo, seremos capaces de obtener y visualizar la propagación de ondas a través de la nube de burbujas, así como las propiedades de atenuación y dispersión total, para un amplio rango de frecuencias y densidades. Por último, se llevará a cabo un estudio de los modos de resonancia, caracterizándolos según los diferentes modos de oscilaciones colectivas que se desprenden del problema de autovalores, como según los patrones de radiación acústica asociados. Por otro lado, los resultados de estas simulaciones serán comparados a través del marco de la Teoría del Medio Efectivo [Frisch (1968)] y la Teoría de Scattering Múltiple formulada por Foldy [Foldy (1945)]. Finalmente, para caracterizar completamente la propagación acústica en el medio de contraste, se analizará la dispersión de un paquete de ondas incidente sobre una nube de burbujas esférica [Parrales (2011)].

Para la validación experimental del código numérico desarrollado, un primer paso es la determinación de las propiedades de las burbujas usando el método experimental propuesto por Sijl et. al. [Sijl (2008)] Una vez resulta esta tarea, el objetivo es validar el código numérico mediante experimentos. Para ello, se medirán la señal dispersada por una nube de burbujas monodispersa variando los diferentes parámetros de control. Una vez hecho esto, y con el fin de caracterizar las propiedades de las microburbujas que componen el agente de contraste, se compararán las medidas experimentales realizadas sobre distintas muestras de UCA estabilizados con un recubrimiento lipídico. De esta manera, se podrán estimar los parámetros viscoelásticos de la membrana presentes en la formulación del código numérico realizando un ajuste sobre las curvas experimentales.

Por otro lado, es esencial incluir las fuerzas de Bjerknes en la formulación y en el código numérico, de manera que las burbujas se puedan desplazar de sus posiciones originales. Para ello, se implementarán algoritmos similares que aquellos usados en dinámica molecular [Frenkel (2001)] para tener en cuenta la interacción mecánica entre las burbujas. Con el fin de modelar correctamente la respuesta acústica de cada burbuja dentro de la nube, se implementará el comportamiento real de las interfases de las burbujas cuando se le añade un recubrimiento de fosfolípidos.

Bibliografía

- [Dijkmans (2004)] P.A. Dijkmans, L.J.M. Juffermans, R.J.P. Musters, A. van Wamel, F.J. ten Cate, W. van Gilst, C.A. Visser, N. de Jong, O. Kamp, “Microbubbles and ultrasound: from diagnosis to therapy.” *Eur. J. Echocardiography*, vol. 5, pp. 245 – 256 (2004)
- [Evan (2004)] E.C. Unger, T. Porter, W. Culp, R. Labell, T. Matsunaga & R. Zutshi, “Therapeutic applications of lipid-coated microbubbles” *Advanced Drug Delivery Reviews*, vol. 56(9), pp. 1291 – 1314 (2004)
- [Ferrara (2007)] K. Ferrara, R. Pollard & M. Borden, “Ultrasound microbubble contrast agents: fundamentals and application to gene and drug delivery.” *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 9, pp. 415 – 447 (2007)
- [Gremiak (1968)] R. Gremiak & P.M. Shah, “Echocardiography of the aortic root” *Invest. Radiol.*, vol. 3, pp. 356 – 388 (1968)
- [de Jong (1992)] N. de Jong, L. Hoff, T. Skotland & N. Born, “Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres: theoretical considerations and some measurements.” *Ultrasonics*, vol. 30(2), pp. 95 – 110 (1992)
- [de Jong (1993)] N. de Jong & L. Hoff, “Ultrasound scattering properties of Albunex microspheres.” *Ultrasonics*, vol. 31(3), pp. 176 – 181 (1993)
- [Church (1995)] C. Churh, “The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 97(3), pp. 1510-1521 (1995)
- [Chatterjee (2003)] D. Chatterjee & K. Sarkar, “A Newtonian rheological model for the interface of microbubble contrast agents.” *Ultrasound Med. Biol.*, vol. 29(12), pp. 1749 – 1757 (2003)

- [Sarkar (2005)] K. Sarkar, W.T. Shi, D. Chatterjee & F. Forsberg, “Characterization of ultrasound contrast microbubbles using in vitro experiments and viscous and viscoelastic interface models for encapsulation.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118(1), pp. 539 – 550 (2005)
- [Doinikov (2007)] A. Doinikov & P.A. Dayton, “Maxwell rheological model for lipid-shelled ultrasound microbubble contrast agents.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 121(6), pp. 3331 – 3340 (2007)
- [Marmottant (2005)] P. Marmottant, S. van der Meer, M. Emmer, M. Versluis, N. de Jong, S. Hilgenfeldt & D. Lohse, “A model for large amplitude oscillations of coated bubbles accounting for buckling and rupture.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118(6), pp. 3499 – 3505 (2005)
- [Zeravicic (2011)] Z. Zeravicic, D. Lohse & W. van Saarloos, “Collective oscillations in bubble clouds.” *J. Fluid Mech.*, vol. 680, pp. 114 – 149 (2011)
- [Arora (2007)] M. Arora, C.D. Ohl & D. Lohse, “Effect of nuclei concentration on cavitation cluster dynamics.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 121(6), pp. 3432 – 3436 (2007)
- [Fuster (2011)] D. Fuster & T. Colonius, “Modelling bubble clusters in compressible liquids.” *J. Fluid Mech.* vol. 688, pp. 352 – 389 (2011)
- [Rayleigh (1917)] Lord Rayleigh, “On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity.” *Phil. Mag.*, vol. 34(200), pp. 94 – 98 (1917)
- [Plesset (1949)] M. Plesset, “The dynamics of cavitation bubbles.” *J. Appl. Mech.*, vol. 16, pp. 277 – 282 (1949)
- [Minnaert (1933)] M. Minnaert, “On musical air-bubbles and the sound of running water” *Philosophical Magazine*, vol. 16(104), pp. 235 – 248 (1933)
- [Fairbank (1977)] W.M. Fairbank & M.O. Scully, “A new noninvasive technique for cardiac pressure measurements: resonant scattering of ultrasound from bubbles.” *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. 24, pp. 107 – 110 (1977)
- [Medina-Palomo (2010)] A. Medina-Palomo & J. Rodríguez-Rodríguez, *In preparation* (2010)
- [Castro-Hernández (2011)] E. Castro-Hernández, W. van Hoeve, D. Lohse & J.M. Gordillo, “Microbubble generation in a co-flow device operated in a new regime.” *Lab Chip.*, vol. 11, pp. 2023 – 2029 (2011)
- [Parrales (2010)] M.A. Parrales, *Análisis de la dispersión acústica por nubes de burbujas*, Master Thesis, Universidad de Sevilla, 2010
- [Leighton (1994)] T.G. Leighton, *The acoustic Bubble*, Academic Press, London, 1994
- [Frisch (1968)] U. Frisch, *Wave propagation in random media*, Academic, New York, 1968
- [Foldy (1945)] L. Foldy, “The multiple scattering of waves.” *Phys. Rev.*, vol. 67, pp. 107 – 109 (1945)

- [Parrales (2011)] M.A. Parrales, M. Perez-Saborid & J.M. Fernandez, “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: Focusing effect and refraction.” *Am. J. Phys.*, vol. 79(4), pp. 401 – 408 (2011)
- [Sijl (2008)] J. Sijl, E. Gaud, P.J.A. Frinking, M. Ardit, N. de Jong, D. Lohse & M. Versluis, “Acoustic characterization of single ultrasound contrast agent microbubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 124(6), pp. 4091 – 4097 (2008)
- [Frenkel (2001)] D. Frenkel, *Understanding molecular simulations: from algorithms to applications*, Academic Press, London, 2001

Capítulo 2

Dispersión acústica en medios lineales no complejos

En este capítulo se lleva a cabo un estudio de la dispersión acústica producida por una inhomogeneidad esférica, la cual es irradiada por un transductor piezoeléctrico finito. Este análisis se realiza de forma analítica basándonos en una formulación puramente ondulatoria y lineal. Mostramos que, cuando las propiedades de la esfera hacen que esta se comporte como una lente acústica convergente (en analogía con el fenómeno óptico), la ganancia en presiones y la posición del foco dependen fuertemente de la relación entre el tamaño de la esfera y la anchura de la irradiación. Por otro lado, analizamos el fenómeno de refracción de haces acústicos estrechos a través de la inhomogeneidad usando un planteamiento bidimensional. Los resultados de la formulación ondulatoria reproducen las predicciones aproximadas de las técnicas de trazado de rayos (*ray-tracing*) y confirman la ley de la refracción (ley de Snell) que caracteriza el comportamiento y trayectoria de haces de rayos y paquetes de ondas acústicas.¹

2.1. Introducción

El análisis de la dispersión acústica por inhomogeneidades esféricas es un tema clásico dentro del estudio de la propagación de ondas y fenómenos ondulatorios. En sus trabajos pioneros sobre propagación del sonido, Lord Rayleigh ya consideró la dispersión de una onda plana armónica por una inhomogeneidad, siendo estos análisis un punto de partida común para distintos modelos de dispersión de ondas [Rayleigh (1945)]. Por ejemplo, Thomas et al. usó esta formulación para analizar la dispersión y refracción acústica producida por un globo lleno de CO₂, con el objetivo de explicar el efecto de enfoque de una lente acústica esférica [Thomas (2009)]. En el presente capítulo, extendemos este análisis incluyendo el efecto del tamaño del transductor que irradiará sobre la esfera. Para tal propósito, en la Sec. 2.2 desarrollaremos una formulación puramente ondulatoria que prediga la propagación acústica, incluyendo en el dominio tanto el transductor como la inhomogeneidad. Finalmente, controlando el tamaño del transductor, su posición relativa y la frecuencia de excitación, seremos capaces de irradiar ondas

¹Basado en el artículo original: Miguel A. Parrales, Miguel Pérez-Saborid, Juan M. Fernández, “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: Focusing effect and refraction” *Am. J. Phys.*, vol. 79, 4, 401-408 (2011)

sobre la esfera de múltiples formas con el fin de caracterizar sus propiedades como lente convergente.

En la Sec. 2.3 mostramos el efecto de enfoque de una lente acústica disminuye notablemente a medida que incrementa la relación entre el tamaño de la esfera y la anchura de la irradiación, la cual incide de forma axisimétrica. En la Sec. 2.4 adaptamos la formulación tridimensional planteada en la Sec. 2.2 para tratar el caso de la dispersión bidimensional, de manera que podamos entender el comportamiento de las ondas irradiadas cuando el transductor no está alineado con la esfera. Consideramos una configuración bidimensional por simplicidad, por lo que nuestras conclusiones solamente son extrapolables de forma cualitativa al caso tridimensional. En este caso, usamos un transductor más pequeño que la esfera para generar un haz armónico y un paquete de ondas estrechos. El resultado ilustra fielmente la ley de la refracción, la cual predice el comportamiento y trayectoria de haces de rayos y paquetes de ondas acústicas.

2.2. Formulación

Consideremos una inhomogeneidad fluida de forma esférica (medio 2 en la Fig. 2.1) con radio a , cuyo centro está localizado con el origen de coordenadas global (O, x, y, z) , la cual está rodeada de un medio fluido infinito (medio 1). En este medio fluido, disponemos el transductor circular (pistón plano) representado en la Fig. 2.1 por la superficie Σ_T de radio a_T . El transductor, el cual está orientado hacia la esfera, tiene su centro en la posición $\mathbf{r}_0 = [x_0, y_0, z_0]$, definida como el origen de coordenadas local (O_T, x_T, y_T, z_T) . Por tanto, el dominio de interés del problema será el semiespacio $z_T > 0$. Si la densidad y la velocidad de propagación del sonido correspondientes al medio 1 (ρ_1 y c_1) difieren de las del medio 2 (ρ_2 y c_2), la esfera modificará la propagación de las ondas irradiadas sobre ella, p_I , dando lugar a una onda dispersada p_s , la cual se propaga en el medio 1 hacia el infinito, y a una onda transmitida p_t , que se propaga por el interior de la esfera. El campo de presiones acústicas total, $p(\mathbf{r}, t)$, está dado entonces por $p(\mathbf{r}, t) = p_I(\mathbf{r}, t) + p_s(\mathbf{r}, t)$ para $r \geq a$, y $p(\mathbf{r}, t) = p_t(\mathbf{r}, t)$ para $r \leq a$.

Dada la evolución temporal de la aceleración vertical de vibración de la superficie del transductor, $\dot{u}_T(t)$, el campo de presiones irradiado, o incidente, en las coordenadas locales viene dado por la integral de Rayleigh [Blackstock (2000)]

$$p_I(\mathbf{r}_T, t) = \rho_1 \int_{\Sigma_T} \frac{\dot{u}_T(t - |\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|/c_1)}{2\pi|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|} d\sigma'_T, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{r}'_T es el vector de posición de un punto sobre la superficie del transductor, y $d\sigma'_T = r'_T dr'_T d\phi'_T$ es un elemento de superficie. Nótese que solamente consideraremos aceleraciones de la forma $\dot{u}_T(t) = u\omega_0\chi(t)\exp(-i\omega_0 t)$, donde u es la velocidad característica, $\chi(t)$ es la amplitud modulada, y ω_0 es la frecuencia principal de las vibraciones. Así pues, una vez evaluada la transformada de Fourier de la expresión (2.1), la onda incidente en el dominio de la frecuencia queda

$$\hat{p}_I(\mathbf{r}_T, \omega) = \rho_1 u \omega_0 \hat{\chi}(\omega - \omega_0) \int_{\Sigma_T} \frac{e^{ik_1|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|}}{2\pi|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T|} d\sigma'_T, \quad (2.2)$$

donde $k_1 = \omega/c_1$ es el número de onda en el medio 1, y $\hat{\chi}$ es la transformada de χ . A continuación, asumiremos que la esfera se encuentra posicionada en la zona de

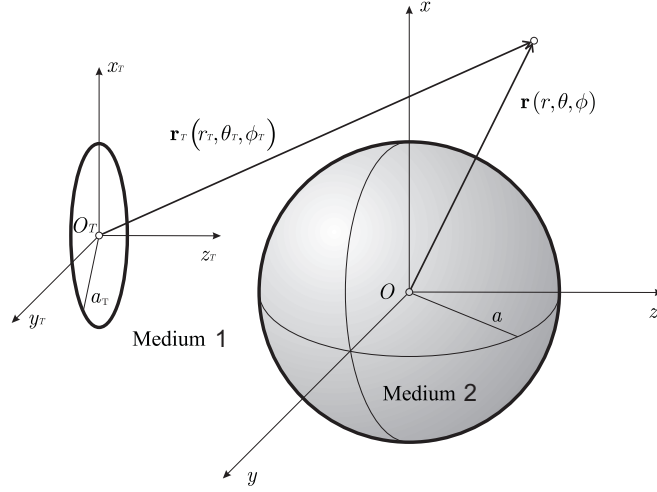


Figura 2.1: Descripción geométrica del problema. La inhomogeneidad esférica está situada en frente del transductor. Los orígenes de coordenadas global y local están situados en el centro de la esfera y del transductor respectivamente. Los dos sistemas de coordenadas están relacionados por $\mathbf{r}_T = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Fraunhofer correspondiente al transductor (campo lejano o *far-field*). Esta asunción formalmente requiere que $|\mathbf{r}_0| \geq R_d$, donde $R_d = k_1 a_T^2/2$ es la distancia de Rayleigh [Blackstock (2000)], por lo que para satisfacer esta condición fijaremos un valor de $|\mathbf{r}_0| = R_d + 2a$. Consecuentemente, la expresión (2.2) en los alrededores de la esfera puede ser aproximada usando la expansión del campo lejano $|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}'_T| \approx r_T - r'_T \sin \theta_T \cos(\phi_T - \phi'_T)$. Una vez evaluada la integral de superficie bajo esta aproximación, la onda incidente presenta la forma $\hat{p}_I = \rho_1 u \omega_0 \hat{\chi}(\omega - \omega_0) a_T^2 \Psi$, donde la función Ψ está definida como el producto $\Psi(r_T, \theta_T) = \Pi(r_T) \cdot \Delta(\theta_T)$, siendo

$$\Pi(r_T) = \frac{e^{ik_1 r_T}}{r_T} \quad \text{y} \quad \Delta(\theta_T) = \frac{J_1(k_1 a_T \sin \theta_T)}{k_1 a_T \sin \theta_T} \quad (2.3)$$

las funciones de propagación y direccionalidad de la onda irradiada, respectivamente, con J_1 la función de Bessel de primer orden. Por tanto, la expresión completa para la onda irradiada sobre la esfera será

$$\hat{p}_I(\mathbf{r}_T, \omega) = \rho_1 u \omega_0 a_T^2 \hat{\chi}(\omega - \omega_0) \frac{e^{ik_1 r_T}}{r_T} \frac{J_1(k_1 a_T \sin \theta_T)}{k_1 a_T \sin \theta_T}. \quad (2.4)$$

Para desarrollar el análisis de las ondas dispersadas y transmitidas, es conveniente expandir la onda incidente \hat{p}_I sobre la superficie de la esfera, $r = a$. Esta expansión debe ser expresada según el sistema de coordenadas globales en términos de armónicos esféricos² Y_{nm} y funciones esféricas de Bessel j_n ,

$$\hat{p}_I|_{r=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n I_{nm}(\omega) j_n(k_1 a) Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.5)$$

²Los armónicos esféricos se escriben

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\cos \theta) e^{im\phi},$$

siendo P_{nm} los polinomios de Legendre asociados [Williams (1999)]. Para $m = 0$ (caso axisimétrico) se tiene que $Y_{n0}(\theta) = \sqrt{(2n+1)/4\pi} P_n(\cos \theta)$, con $P_n = P_{n0}$ el polinomio de Legendre de orden n .

El cálculo de los coeficientes I_{nm} de la expansión se hará substituyendo la expresión (2.4) evaluada en la superficie de la esfera en la parte izquierda de (2.5). Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los armónicos esféricos, se obtiene finalmente

$$I_{nm} = \rho_1 u \omega_0 a_T^2 \hat{\chi}(\omega - \omega_0) \frac{\Upsilon_{nm}(\omega)}{j_n(k_1 a)}, \quad (2.6)$$

donde la función Υ_{nm} se define como $\Upsilon_{nm}(\omega) = \int_{\Omega} \Psi|_{r=a} Y_{nm}^*(\theta, \phi) d\Omega$, siendo $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ un elemento de ángulo sólido. Esta integral, en general, se debe resolver numéricamente para cada valor de los índices n y m usando, por ejemplo, cuadraturas gaussianas dentro del entorno de programación de MATLAB (The MathWorks, Inc.).

Como se comentó anteriormente, cuando la onda incidente entra en contacto con la inhomogeneidad se genera tanto una onda dispersada $p_s(\mathbf{r}, t)$, que se propagará por el medio 1, como una onda transmitida $p_t(\mathbf{r}, t)$, la cual se propaga por el interior de la esfera (medio 2). Estas ondas aparecen debido a que la onda incidente no puede cumplir por sí sola las condiciones de contorno en $r = a$. Por lo tanto, el cálculo de la estructura de estas ondas será el objeto de nuestro análisis. La transformadas de Fourier de la onda dispersada $\hat{p}_s(\mathbf{r}, \omega)$ y la transmitida $\hat{p}_t(\mathbf{r}, \omega)$ deben satisfacer la ecuación de Helmholtz en sus respectivos dominios, así pues

$$\nabla^2 \hat{p}_s(\mathbf{r}, \omega) + k_1^2 \hat{p}_s(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad \text{para } |\mathbf{r}| \geq a, \quad (2.7)$$

$$\nabla^2 \hat{p}_t(\mathbf{r}, \omega) + k_2^2 \hat{p}_t(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad \text{para } |\mathbf{r}| \leq a, \quad (2.8)$$

donde $k_2 = \omega/c_2$ es el número de onda asociado al medio 2. Las ecuaciones (2.7) y (2.8) deben ser resueltas sujetas a las siguientes condiciones de contorno:

- (a) Para $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, la onda dispersada debe satisfacer la condición de radiación de Sommerfeld [Williams (1999)].
- (b) Para $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$, la onda transmitida debe ser regular y estar acotada.
- (c) La presión total y la componente normal de la velocidad deben ser continuas a través del contorno de la esfera $r = a$, es decir

$$\hat{p}_I|_{r=a} + \hat{p}_s|_{r=a} = \hat{p}_t|_{r=a}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \hat{p}_I}{\partial r}|_{r=a} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \hat{p}_s}{\partial r}|_{r=a} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \hat{p}_t}{\partial r}|_{r=a}. \quad (2.10)$$

En el sistema global de coordenadas esféricas, las soluciones generales de las ecuaciones (2.7) y (2.8) que satisfacen las condiciones (a) y (b) pueden ser expresadas en términos de armónicos esféricos Y_{nm} , y funciones esféricas de Hankel $h_n^{(1)}$ y de Bessel j_n , de manera que

$$\hat{p}_s(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n S_{nm}(\omega) h_n^{(1)}(k_1 r) Y_{nm}(\theta, \phi), \quad (2.11)$$

$$\hat{p}_t(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n T_{nm}(\omega) j_n(k_2 r) Y_{nm}(\theta, \phi). \quad (2.12)$$

Los coeficientes S_{nm} y T_{nm} de ambas soluciones se pueden expresar en función del ya conocido I_{nm} correspondiente a la onda incidente. Así pues, introduciendo las expresiones (2.5), (2.11) y (2.12) en las condiciones de contorno (2.9) y (2.10), llegamos al siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} h_n^{(1)}(k_1 a) & -j_n(k_2 a) \\ h_n^{(1)'}(k_1 a) & -\xi j_n'(k_2 a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{nm} \\ T_{nm} \end{bmatrix} = -I_{nm} \begin{bmatrix} j_n(k_1 a) \\ j_n'(k_1 a) \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

donde $\xi = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$ se ha definido como la relación de impedancias acústicas entre el medio 1 y el medio 2. Por tanto, la solución del sistema (2.13) será simplemente $[S_{nm}, T_{nm}] = I_{nm}[f_n^s, f_n^t]$, donde las funciones f_n^s y f_n^t resultantes de la inversión matricial están dadas por

$$f_n^s(\omega) = \frac{j_n(k_2 a) j_n'(k_1 a) - \xi j_n(k_1 a) j_n'(k_2 a)}{\xi h_n^{(1)}(k_1 a) j_n'(k_2 a) - j_n(k_2 a) h_n^{(1)'}(k_1 a)}, \quad (2.14)$$

$$f_n^t(\omega) = \frac{h_n^{(1)}(k_1 a) j_n'(k_1 a) - j_n(k_1 a) h_n^{(1)'}(k_1 a)}{\xi h_n^{(1)}(k_1 a) j_n'(k_2 a) - j_n(k_2 a) h_n^{(1)'}(k_1 a)}. \quad (2.15)$$

Una vez conocidos los coeficientes de las expansiones para la presión de la onda dispersada y transmitida, usaremos la transformada inversa de Fourier para obtener finalmente la solución para la presión total en el dominio del tiempo.

2.3. Efecto de enfoque

En esta sección, aplicaremos la formulación planteada anteriormente para extender el análisis realizado por Thomas et al. Incluiremos el efecto del tamaño del transductor para observar el comportamiento de las ondas armónicas irradiadas sobre la superficie de una lente acústica de forma esférica. Para generar ondas armónicas, el transductor tiene que vibrar con una amplitud constante $\chi = 1$, con lo que se tiene $\hat{\chi} = 2\pi\delta(\omega)$, siendo δ la función delta de Dirac. Consideraremos que el centro del transductor está en la posición $\mathbf{r}_0 = [0, 0, z_0]$, alineado con la esfera, con lo que el campo acústico total será axilsimétrico, es decir, independiente del ángulo acimutal ϕ . Por lo tanto, solo los términos correspondientes a $m = 0$ estarán presentes en la expresiones (2.11) y (2.12).

Es conveniente, por otro lado, caracterizar la irradiación sobre la esfera utilizando el parámetro geométrico γ , definido como

$$\gamma = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_0} = \beta \left(\frac{1}{2} \frac{k_1 a_T}{k_1 a} + \frac{2}{k_1 a_T} \right), \quad (2.16)$$

donde $\theta_0 = \arcsin(a/|z_0|)$ es el ángulo subtendido por el contorno de esfera desde el centro del transductor O_T , y $\theta_i = \arcsin(\beta/k_1 a_T)$ es la apertura angular de la onda incidente, siendo $\beta \approx 3.832$ la primera raíz de J_1 .

Las características geométricas de la radiación acústica sobre la esfera están representadas en la Fig. 2.2. Por un lado, vemos en la Fig. 2.2(a) que, para cada valor de $k_1 a$, el parámetro γ presenta un mínimo dado por $\gamma_{\min} = 2\beta/\sqrt{k_1 a}$ para $k_1 a_T = 2\sqrt{k_1 a}$. Este valor mínimo se corresponde con el tamaño más pequeño posible de la zona de irradiación sobre la esfera en estas condiciones. Nótese en la Fig. 2.2(b) y Fig. 2.2(c)

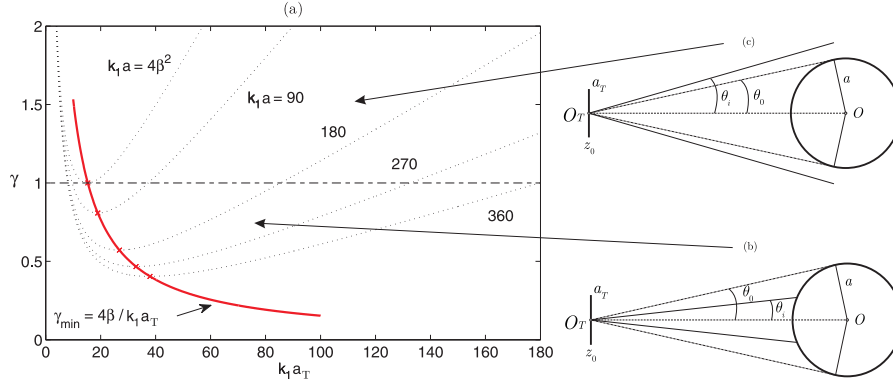


Figura 2.2: Descripción de la irradiación sobre la esfera. (a) Diagrama de fases para las distintas configuraciones de irradiación. Los puntos de funcionamiento de interés deben situarse a la derecha de la curva γ_{\min} . (b) Irradiación localizada: cuando $\gamma < 1$, el haz incidente resulta más estrecho que el tamaño de la esfera. Esto solamente es posible para $k_1 a > 4\beta^2 \approx 58.737$. (c) Irradiación no localizada: si $\gamma > 1$, el haz incidente es más ancho que el tamaño de la esfera.

cómo el valor de γ determina el tamaño de esa zona a través de las propiedades direccionales del haz irradiado. Como se muestra en la Fig. 2.2(a), para cada curva $k_1 a$, hay dos posibles valores de $k_1 a_T$ que dan lugar al mismo valor de γ . Debido a que la apertura angular del haz θ_i aumenta para valores decrecientes de $k_1 a_T$, la direccionalidad en la propagación es más alta para la solución de mayor valor. Dado a que estamos principalmente interesados en el comportamiento de haces estrechos, con una apertura angular relativamente baja, limitaremos este estudio a los casos que satisfacen $k_1 a_T > 2\sqrt{k_1 a}$.

En nuestros cálculos hemos empleado los mismos fluidos que en Thomas et al., es decir: aire ($\rho_1 = 1.24 \text{ kg/m}^3$, $c_1 = 343 \text{ m/s}$) para el medio 1, y dióxido de carbono ($\rho_2 = 1.98 \text{ kg/m}^3$, $c_2 = 258 \text{ m/s}$) para el medio 2. En este caso, la esfera se comportará como una lente convergente [Thomas (2009)]. La propagación de la onda incidente a lo largo del eje z se obtiene transformando (2.4) al dominio del tiempo,

$$p_I(z, t) = \frac{1}{2} \rho_1 u \omega_0 a_T^2 \frac{e^{ik_1|z-z_0|}}{|z-z_0|} e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.17)$$

Por otra parte, la propagación de la onda dispersada en z se calcula transformando (2.11) al dominio temporal usando las expresiones halladas para S_{nm} y para I_{nm} ,

$$p_s(z, t) = \rho_1 u \omega_0 a_T^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} \frac{\Upsilon_{n0}(\omega_0)}{j_n(k_1 a)} f_n^s(\omega_0) h_n^{(1)}(k_1 z) e^{-i\omega_0 t}. \quad (2.18)$$

Los resultados para la ganancia de presiones $|p/p_I| = |p_I + p_s|/|p_I|$ detrás de la esfera en función de la distancia adimensional $k_1 z$ están representados en la Fig. 2.3. Estos resultados han sido obtenidos fijando el valor de $k_1 a$, y variando el parámetro γ . Para cada valor de γ se observa que existe un pico máximo dominante el cual define la posición del foco de la lente, q , respecto de su centro geométrico. Esta posición está pues centrada en una región focal, definida por la anchura característica del pico dominante. Como comprobamos, para grandes valores de γ se recuperan los resultados correspondientes a la formulación de onda plana incidente, la cual da la máxima ganancia focal [Thomas (2009)]. En este caso, la región focal está bien definida, y se observa cómo la

posición del foco q coincide con las predicciones que nos devuelve la aproximación de *ray-tracing*, $q/a \approx 1.87$, reportada por Thomas et al. (ver Fig. 2.4). El acuerdo existente entre esta aproximación y nuestros resultados ($q/a \approx 1.68$ para $k_1 a = 180$ y $q/a \approx 1.73$ para $k_1 a = 270$) confirma la exactitud del método de *ray-tracing* para grandes valores de $k_1 a$ (límite de acústica geométrica). La Fig. 2.3 muestra que el efecto de enfoque depende fuertemente de la localización de la irradiación sobre la superficie de la esfera. Como vemos, a medida que el valor del parámetro geométrico γ descende, la ganancia focal disminuye, mientras que la región focal se ensancha y la posición del foco se aleja de la superficie de la lente. Esta nueva posición se acerca al valor $q/a = 2.02$ dado por la aproximación paraxial [Thomas (2009)] (ver Fig. 2.4). Cuando el valor de γ se aproxima a γ_{\min} , las oscilaciones de la ganancia se aplanan, con lo que es imposible determinar ningún pico máximo dominante. En este caso decimos que la posición del foco está distribuida a lo largo del eje de propagación.

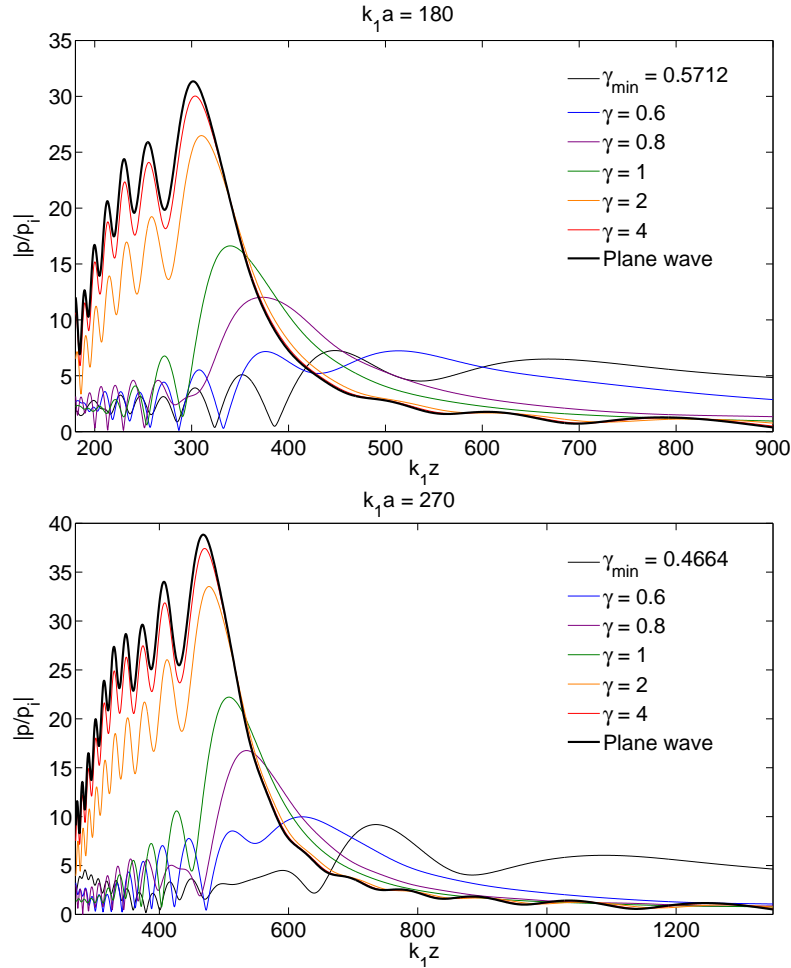


Figura 2.3: Efecto de enfoque en el eje de propagación. (a) $k_1 a = 180$: la posición del foco varía de $q/a = 1.68$ a $q/a = 2.08$. (b) $k_1 a = 270$: la posición del foco varía de $q/a = 1.73$ a $q/a = 2.12$.

Para estos valores de γ tan pequeños, la superficie irradiada de la esfera está confinada a una región muy estrecha. En consecuencia, dado que los ángulos de refracción son pequeños, los rayos interfieren de forma constructiva relativamente lejos de la lente.

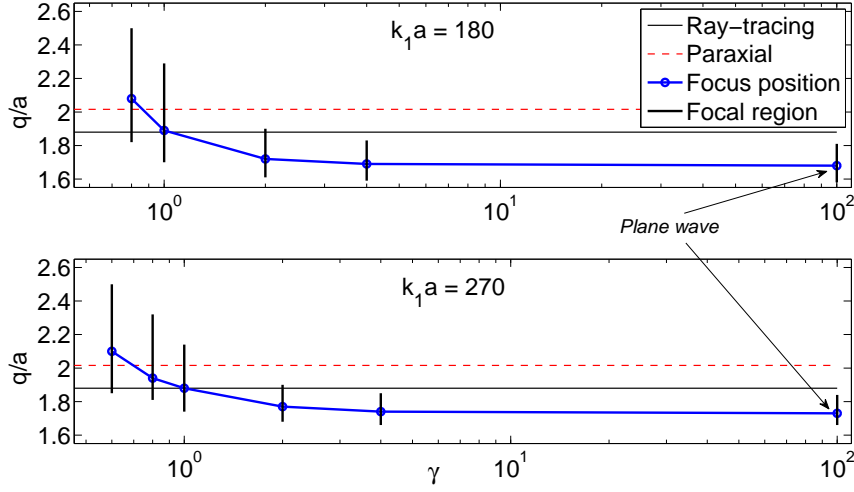


Figura 2.4: Evolución de la posición focal. Para irradiaciones con $\gamma \gg 1$, la posición del foco está bien definida, aproximándose su valor a la predicción del método de *ray-tracing*. Por contra, cuando $\gamma < 1$, la región focal se ensancha a medida que el foco se sitúa según la posición predicha por la aproximación paraxial.

En contraste, para grandes valores de γ , el haz es tan ancho que la irradiación cubre completamente el área frontal de la esfera. En este caso, los ángulos de refracción son más grandes con lo que se producirán interferencias constructivas en una región más próxima a la lente, acercándose finalmente el punto focal.

2.4. Ley de refracción

A continuación adaptaremos la formulación de la Sec. 2.2 a una configuración bi-dimensional con el fin de obtener información sobre el comportamiento de las ondas irradiadas cuando el transductor no está alineado con el eje z (no axilsimétrico). Consideraremos ahora una inhomogeneidad con forma cilíndrica, de radio a , e infinitamente larga en la dirección y . Este cilindro estará irradiado por una transductor con forma de banda plana, de ancho $2a_T$, y de extensión infinita a lo largo del eje y . Si R y Θ denotan las coordenadas polares en un plano perpendicular al eje del cilindro, podemos reescribir la formulación 3D para adaptarla a la nueva configuración geométrica [Pierce (1991)]. De esta manera, en analogía con la expresión (2.4), la presión de la nueva onda irradiada por el transductor tiene la siguiente estructura en el dominio de la frecuencia,

$$\hat{p}_I(\mathbf{r}_T, \omega) = \rho_1 u \omega_0 a_T \hat{\chi}(\omega - \omega_0) \frac{e^{ik_1 R_T}}{\sqrt{k_1 R_T}} \frac{\sin(k_1 a_T \sin \Theta_T)}{k_1 a_T \sin \Theta_T}. \quad (2.19)$$

Nótese la nueva estructura de la función $\Psi(R_T, \Theta_T)$. Bajo esta configuración cilíndrica, la expansión de la onda incidente sobre la superficie del cilindro, $R = a$, resulta

$$\hat{p}_I|_{R=a} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\omega) J_n(k_1 a) e^{in\Theta}. \quad (2.20)$$

Operando igual que en la Sec. 2.2, y usando las propiedades de ortogonalidad de las exponenciales complejas, el coeficiente I_n será

$$I_n = \rho_1 u \omega_0 a_T \hat{\chi}(\omega - \omega_0) \frac{\Upsilon_n(\omega)}{J_n(k_1 a)}, \quad (2.21)$$

siendo en este caso $\Upsilon_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi|_{R=a} \exp(-in\Theta) d\Theta$. Por otra parte, las ondas dispersada y transmitida que cumplen la ecuación de Helmholtz, según las condiciones (a) y (b), en la nueva configuración se expresan

$$\hat{p}_s(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(\omega) H_n^{(1)}(k_1 R) e^{in\Theta}, \quad (2.22)$$

$$\hat{p}_t(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(\omega) J_n(k_2 R) e^{in\Theta}, \quad (2.23)$$

donde $H_n^{(1)}$ y J_n son las funciones de Hankel y Bessel de orden n respectivamente. Así pues, evaluando la condición de contorno (c), se obtienen finalmente los coeficientes S_n y T_n , los cuales tendrán expresiones análogas al resultado del caso 3D.

En esta sección usaremos, igual que antes, aire para el medio 1, y CO₂ para el medio 2. Analizaremos la irradiación oblicua para dos casos distintos. El primero corresponde a una haz armónico muy estrecho, cuya longitud de onda es mucho más pequeña que el tamaño de la lente (Sec. 2.4.1). Para el segundo caso, presentaremos la evolución espacio-temporal de un paquete de ondas estrecho y de alta frecuencia generado por el transductor (Sec. 2.4.2).

2.4.1. Haz armónico incidente

Si consideramos que el transductor vibra de forma armónica, la transformación de la expresión de la onda incidente (2.19) en el dominio del tiempo resulta simplemente

$$p_I(x, z, t) = \rho_1 u \omega_0 a_T \frac{e^{ik_1 R_T}}{\sqrt{k_1 R_T}} \frac{\sin(k_1 a_T \sin \Theta_T)}{k_1 a_T \sin \Theta_T} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.24)$$

donde $R_T = \sqrt{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2}$ y $\Theta_T = \arctan[(x - x_0)/(z - z_0)]$. Por otro lado, el cálculo de las ondas dispersada y transmitida se deberá adaptar a la configuración bidimensional [Pierce (1991)] según las expresiones (2.22) y (2.23). En el dominio del tiempo, estas ondas se escriben, respectivamente,

$$p_s(x, z, t) = \rho_1 u \omega_0 a_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Upsilon_n(\omega_0)}{J_n(k_1 a)} f_n^s(\omega_0) H_n^{(1)}(k_1 R) e^{in\Theta} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.25)$$

$$p_t(x, z, t) = \rho_1 u \omega_0 a_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Upsilon_n(\omega_0)}{J_n(k_1 a)} f_n^t(\omega_0) J_n(k_2 R) e^{in\Theta} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.26)$$

donde $R = \sqrt{z^2 + x^2}$ y $\Theta = \arctan(x/z)$.

Los resultados, una vez evaluadas estas expresiones, se muestran en la Fig. 2.5, donde se ha representado la amplitud de la intensidad acústica de la onda total en un plano perpendicular a la lente. La amplitud de la onda total está dada por $|p| = |p_I + p_s|$ para

$R > a$, y $|p| = |p_t|$ para $R < a$. Se observa que los ángulos de refracción predichos por la ley de refracción (ley de Snell), dada por $c_2 \sin \theta_1 = c_2 \sin \theta_2$, concuerdan de forma muy precisa con aquellos obtenidos mediante la formulación ondulatoria aquí expuesta. Por otro lado se muestra la aparición de zonas de gran amplitud acústica cerca de la región focal, justo detrás de la lente. En la aproximación de acústica geométrica, estas zonas se conocen como *cáusticas*, y se definen como la envolvente del sistema de rayos que componen el haz. Sin embargo, bajo esta aproximación, la amplitud de las cáusticas tienden a un valor infinito. Como vemos, esta singularidad puede ser eliminada si se usa una formulación ondulatoria completa para predecir la propagación acústica en estas zonas.

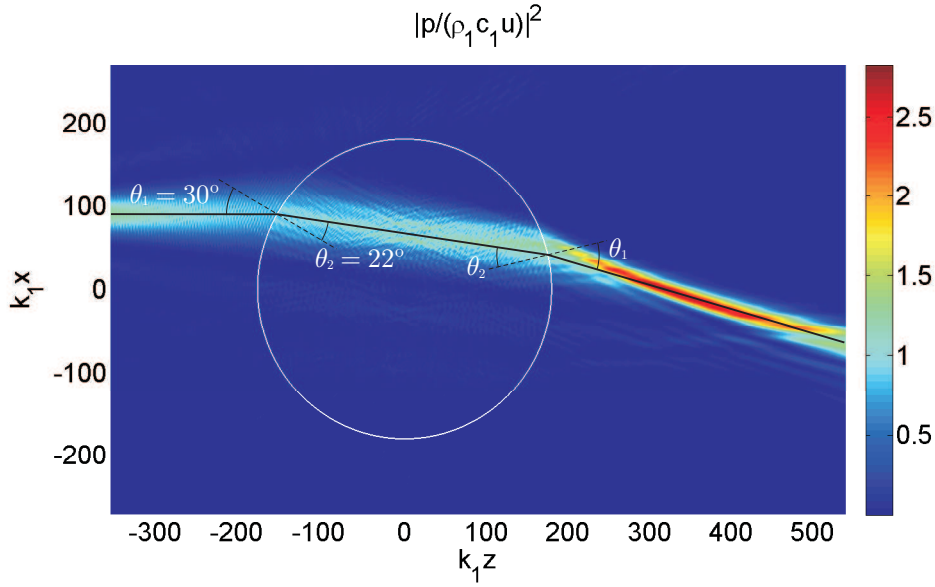


Figura 2.5: Comportamiento del haz armónico a través de la lente ($k_1 a = 180$ y $\gamma = \gamma_{\min}$). Debido al fenómeno de refracción, el haz incidente se curva tanto al entrar en contacto con el cilindro, como a la salida de este. Los ángulos de refracción representados son los predichos por la ley de Snell, $c_2 \sin \theta_1 = c_2 \sin \theta_2$, siendo $\theta_1 = 30^\circ$ en ángulo de incidencia. Nótese la formación de la cáustica detrás de la lente.

2.4.2. Paquete de ondas incidente

En este caso, para que el transductor genera un paquete de ondas incidente, debe vibrar de manera adecuada para producir un pulso modulado en el tiempo. Así pues, asumiremos que la amplitud de vibración del transductor sigue una evolución gaussiana $\chi(t) = \exp[-(t - t_c)^2/\mu^2]$, donde μ es el anchura característica del pulso y t_c es un instante de referencia en el cual se alcanza la amplitud máxima. Como sabemos, esta amplitud en el dominio de la frecuencia será $\hat{\chi}(\omega) = \sqrt{\pi}\mu \exp[-(\mu\omega/2)^2] \exp(i\omega t_c)$. La onda incidente obtenida tras transformar la expresión (2.19) al dominio temporal se escribe

$$p_I(x, z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_1 u \omega_0 a_T \mu e^{-i\omega_0 t_c} \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\mu(\omega - \omega_0)/2]^2} \frac{e^{ik_1 R_T}}{\sqrt{k_1 R_T}} \frac{\sin(k_1 a_T \sin \Theta_T)}{k_1 a_T \sin \Theta_T} e^{-i\omega(t - t_c)} d\omega. \quad (2.27)$$

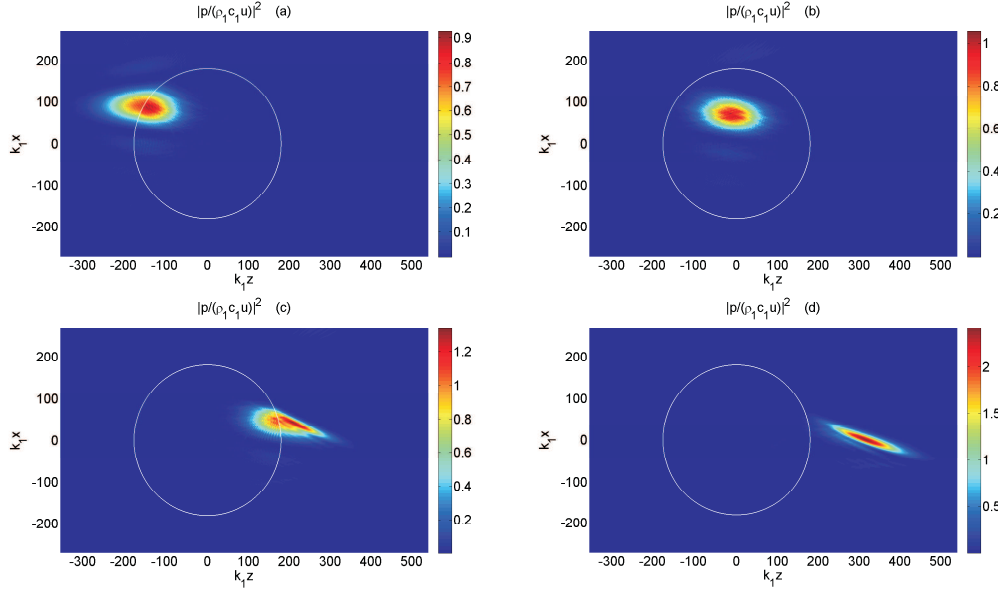


Figura 2.6: Trayectoria del paquete de ondas a través de la lente ($k_1 a = 180$ and $\gamma = \gamma_{\min}$). (a) $\omega_0 t = 576$: la onda incide sobre el cilindro y comienza a desviarse de su trazado. (b) $\omega_0 t = 756$: la onda se propaga a través de la lente con una menor velocidad, siguiendo la dirección marcada por la ley de refracción. (c) $\omega_0 t = 1008$: una vez alcanza la parte trasera del cilindro, el paquete de ondas vuelve a cambiar de dirección de propagación, y su amplitud comienza a aumentar debido a la cercanía del punto focal. (d) $\omega_0 t = 1152$: la onda sigue su nueva trayectoria, formando una cáustica de gran amplitud al pasar a través de la región focal.

Nótese que esta expresión es algo más compleja que en el caso de irradiación armónica debido a la dependencia temporal de la vibración del transductor. La integral infinita que aparece en la expresión (2.27) representa la transformada inversa de Fourier, la cual puede ser calculada numéricamente a través de algoritmos de FFT (transformada rápida de Fourier). Como se hizo anteriormente, para el cálculo de las ondas dispersada y transmitida se transformarán las expresiones correspondientes a la nueva configuración al dominio del tiempo, resultando

$$p_s(x, z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_1 u \omega_0 a_T \mu e^{-i\omega_0 t_c} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\mu(\omega-\omega_0)/2]^2} \frac{\Upsilon_n(\omega)}{J_n(k_1 a)} f_n^s(\omega) H_n^{(1)}(k_1 R) e^{in\Theta} e^{-i\omega(t-t_c)} d\omega, \quad (2.28)$$

$$p_t(x, z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \rho_1 u \omega_0 a_T \mu e^{-i\omega_0 t_c} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\mu(\omega-\omega_0)/2]^2} \frac{\Upsilon_n(\omega)}{J_n(k_1 a)} f_n^t(\omega) J_n(k_2 R) e^{in\Theta} e^{-i\omega(t-t_c)} d\omega. \quad (2.29)$$

respectivamente.

Los resultados, una vez evaluadas estas expresiones, se muestran en la Fig. 2.6, donde se ha representado la amplitud de la intensidad acústica de la onda total en un plano perpendicular a la lente. La amplitud de la onda total está dada por $|p| = |p_I + p_s|$ para $R > a$, y $|p| = |p_t|$ para $R < a$. La Fig. 2.6 muestra distintos instantes de la evolución

espacio-temporal del paquete de ondas para 4 valores del tiempo adimensional $\omega_0 t$. Se observa que la vibración pulsatoria inducida en el transductor, con una alta frecuencia principal ω_0 , crea un paquete de ondas que se propaga por el medio 1 hasta incidir, de forma oblicua, sobre el cilindro. Vemos que este paquete modifica su dirección de propagación y se refracta a través de la lente, lo que está acorde con lo predicho por la ley de refracción aplicada a la acústica geométrica. En particular, vemos cómo la trayectoria del paquete de ondas coincide con el trazado que marca el haz armónico asociado, de frecuencia ω_0 , representado en la Fig. 2.5. Esto sucede debido a que el medio 2, es decir, el fluido interior de la lente, es un medio no dispersivo, manteniéndose por tanto los ángulos de refracción.

2.5. Conclusiones

En este capítulo hemos realizado una formulación ondulatoria general para estudiar la dispersión acústica por inhomogeneidades esféricas, las cuales están siendo irradiadas por un transductor finito. Este tratamiento posee un gran potencial a la hora de simular distintos fenómenos ondulatorios en escenarios reales y experimentales. Para mostrar la potencia de esta formulación, hemos extendido el análisis de Thomas et al. con el fin de estudiar el efecto de enfoque de una lente acústica esférica [Thomas (2009)]. Nuestro análisis demuestra que este efecto disminuye a medida que el haz de irradiación sobre la esfera es más estrecho.

Por otro lado, hemos analizado también el fenómeno de refracción tanto de un haz armónico estrecho como de un paquete de ondas cuando la irradiación sobre la esfera es oblicua. Como se esperaba, la ley de refracción para haces estrechos se recupera de forma natural, así como la transición teórica de la acústica ondulatoria a la acústica geométrica, lo cual se comprueba en la predicción de la propagación en la zona de formación de cáusticas.

Bibliografía

- [Rayleigh (1945)] J.W.S. Rayleigh, *The theory of sound. Vol. II*, Dover Publications, Inc., New York, 1945
- [Thomas (2009)] D.C. Thomas, K. L. Gee, R. S. Turley, “A ballon lens: Acoustic scattering from a penetrable sphere.” *Am. J. Phys.*, vol. 77(3), pp. 197 – 203 (2009)
- [Blackstock (2000)] D.T. Blackstock, *Fundamentals of physical acoustics*, Wiley-Interscience, New York, 2000
- [Anderson (1950)] V.C. Anderson, “Sound scattering from a fluid sphere.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 22, pp. 426 – 431 (1950)
- [Williams (1999)] E.G. Williams, *Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography*, Academic Press, Washington DC, 1999
- [Pierce (1991)] A.D. Pierce, *Acoustic: an introduction to its physical principles and applications*, Acoustical Society of America, New York, 1991

-
- [Parrales (2011)] M.A. Parrales, M. Perez-Saborid, J.M. Fernandez, “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: Focusing effect and refraction.” *Am. J. Phys.*, vol. 79(4), pp. 401 – 408 (2011)

Capítulo 3

Análisis de la dinámica de microburbujas

Las ecuaciones que gobiernan las oscilaciones radiales de una burbuja aislada, provocadas por una excitación acústica externa, han sido revisadas y formuladas. Para ello, se ha llevado a cabo un riguroso análisis del movimiento de la fase líquida externa y de la fase gaseosa interior respectivamente, con el fin de establecer dichas ecuaciones en su versión más completa. Posteriormente, se ha analizado la dinámica lineal de microburbujas, revisando los conceptos de frecuencia natural y amortiguamiento, y discutiendo su rango paramétrico de validez. Finalmente, las propiedades acústicas de las burbujas han sido plasmadas a través de la definición de la sección eficaz de dispersión, absorción y extinción. Los resultados de los anteriores análisis nos llevan a identificar las múltiples ventajas de estas microburbujas para su uso como agentes de contraste ultrasónicos.

3.1. Introducción

Los estudios de la dinámica de pequeñas burbujas inmersas en un fluido se inician a principios del siglo XX con los trabajos de Lord Rayleigh, cuya finalidad era analizar los mecanismos que provocaban el colapso inercial de una cavidad esférica [Rayleigh (1917)]. Uno de los primeros objetivos de la formulación de estos modelos dinámicos fue comprender y controlar los fenómenos de cavitación, presentes en multitud de procesos industriales y aplicaciones tecnológicas [Plesset (1949), Flynn (1975), Lauterborn (1976), Blake (1987)]. Los trabajos que se desarrollaron a partir de entonces se centraron en establecer nuevos modelos y correcciones que recogiesen, de la forma más precisa posible, el carácter no lineal de las oscilaciones de las burbujas [Trilling (1952), Neppiras (1980), Keller (1980), Feng (1997)]. Tanto los estudios detallados del comportamiento termodinámico de la fase gaseosa [Chapman (1972), Prosperetti (1977)], como la identificación de los mecanismos de disipación y reradiación de las burbujas [Devin (1959), Eller (1970), Crum (1983)], fueron de gran importancia para el desarrollo de este campo de la física. Todos estos avances en los modelos de la dinámica de burbujas permitieron un profundo análisis, en la última década del siglo pasado, de los fenómenos de sonoluminiscencia. Estos fenómenos constituyen un caso particular asociado a la dinámica burbujas de cavitación, las cuales llegan a generar pulsos de luz debido a las altas presiones y temperaturas alcanzadas en el instante de colapso [Gaitan (1992), Putterman (1994), Lohse (2001), Brenner (2002)].

Por otro lado, las propiedades ecogénicas de las burbujas se conocían desde finales del primer tercio del siglo XX gracias a los trabajos de Minnaert, el cual caracterizó una frecuencia de resonancia asociada a las oscilaciones radiales de estas [Minnaert (1933)]. Esto establece que las burbujas responden de forma resonante ante excitaciones acústicas de determinadas frecuencias. Debido a su alta compresibilidad, las burbujas son capaces de dispersar una gran cantidad de energía sonora de forma muy eficiente. Por tanto, en las últimas décadas, se han venido desarrollando multitud de estudios con el objetivo de caracterizar las propiedades acústicas de las microburbujas para su uso como agentes de contraste ultrasónicos en distintas aplicaciones clínicas [Gremiak (1968), Leighton (1994), Hilgenfeldt (1998), de Jong (2002), Stride (2003)].

3.2. Dinámica de burbujas

Considérese una burbuja de gas esférica, con un radio de equilibrio R_o . Asumiremos que la burbuja se encuentra inmersa en un medio líquido infinito a una presión hidrostática p_∞ , cuya densidad de equilibrio es ρ_∞ . Entonces, cualquier perturbación acústica de longitud de onda $\lambda \gg R_o$ hará que la burbuja oscile de forma radial debido al desequilibrio de presiones a ambos lados de su contorno [Leighton (1994)]. La dinámica del movimiento radial del contorno de la burbuja será el objeto de nuestro análisis.

3.2.1. Problema exterior: movimiento de la fase líquida

El movimiento del líquido, de densidad ρ y viscosidad μ_L , que rodea a la burbuja durante sus oscilaciones estará gobernado por la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, es decir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_L, \quad (3.2)$$

donde p representa la presión del fluido y $\bar{\bar{\tau}}_L$ es el tensor de esfuerzos viscosos. Considerando un movimiento puramente radial con simetría esférica, la velocidad a una distancia r del centro de la burbuja será $\mathbf{v} = u(r)\mathbf{u}_r$, siendo u la velocidad radial. Como $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, y dado que el medio es prácticamente incompresible, podremos anular los términos asociados a los esfuerzos viscosos en primera aproximación. No obstante, los efectos de compresibilidad juegan un papel fundamental a la hora de caracterizar las ondas radiadas por las burbujas. En este caso, los esfuerzos viscosos no serán nulos, pero sí despreciables frente a los términos de inercia. Efectivamente, tenemos que $\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}_L / \rho (\partial u / \partial t) \sim \mu_L \omega_o / \rho_\infty c_\infty^2 \ll 1$, siendo c_∞ la velocidad del sonido del líquido en equilibrio y ω_o la frecuencia característica de las oscilaciones de la burbuja. Así pues, asumiendo que el movimiento del líquido es isentrópico, podemos escribir la ecuación de estado para la presión como $dp = c^2 d\rho$, siendo c la velocidad del sonido local. Además, si el líquido es ideal, la variación de su entalpía será $dh = dp/\rho$, con lo que $h = \int_{p_\infty}^p dp/\rho$ tomando como referencia $h_\infty = 0$. Debido a que el campo de velocidades es irrotacional, se puede definir el potencial ψ como $\mathbf{v} = \nabla \psi$. Por tanto, las ecuaciones (3.1) y (3.2) toman la forma

$$\nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{\partial h}{\partial r} \right] = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + h = 0, \quad (3.4)$$

donde se ha escrito $u = \partial \psi / \partial r$. Nótese que la ecuación de cantidad de movimiento (3.2) se ha integrado en r teniendo en cuenta que, lejos de la burbuja, se cumple $(\partial \psi / \partial t)_\infty = u_\infty^2 = h_\infty = 0$. Este sistema debe resolverse junto a unas condiciones en el contorno de la burbuja, $r = R$. Así pues, la condición cinemática será $u = \dot{R}$, y la condición dinámica $h = h_L$, la cual se podrá relacionar con el comportamiento del gas en el interior de la burbuja mediante una condición de salto.

A continuación, adimensionalizaremos el sistema de ecuaciones y condiciones de contorno anteriores con el fin de encontrar una solución aproximada aplicando métodos de perturbación [Prosperetti (1986)]. Usaremos las siguientes variables adimensionales: $r_* = r/R_o$, $t_* = t\omega_o$, $\psi_* = \psi/R_o U$, $h_* = h/U^2$, $c_* = c/c_\infty$ y $R_* = R/R_o$, siendo $U = \omega_o R_o$ la velocidad característica de las oscilaciones de la burbuja. De esta manera, podemos escribir

$$\nabla_*^2 \psi_* + \frac{\epsilon^2}{c_*^2} \left[\frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial r_*} \right) \frac{\partial h_*}{\partial r_*} \right] = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \psi_*}{\partial t_*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial r_*} \right)^2 + h_* = 0 \quad (3.6)$$

con las condiciones de contorno $u_* = \partial \psi_* / \partial r_* = R'_*$ y $h_* = h_{L*}$ para $r_* = R_*$. Nótese que el simbolo $'$ denota ahora la diferenciación con respecto a t_* . El parámetro $\epsilon = U/c_\infty$ que aparece en la adimensionalización se identifica con el numero de Mach del movimiento del contorno de la burbuja, pudiéndose considerar generalmente pequeño. Así pues, construiremos una solución aproximada de la forma $\psi_* \simeq \psi_0 + \epsilon \psi_1$, $h_* \simeq h_0 + \epsilon h_1$. Las ecuaciones para orden cero son

$$\nabla_*^2 \psi_0 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial t_*} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r_*} \right)^2 + h_0 = 0, \quad (3.7)$$

mientras que para el primer orden son

$$\nabla_*^2 \psi_1 = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t_*} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r_*} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial r_*} + h_1 = 0. \quad (3.8)$$

Estos sistemas deberán resolverse junto con las condiciones de contorno sobre la burbuja. Como vemos, las ecuaciones del movimiento del líquido se reducen en primera aproximación a la ecuación de Laplace y Bernoulli, las cuales modelan el comportamiento de un fluido incompresible. Esto es debido a que a distancias del orden $r \sim R_o$ (*near field*), las perturbaciones producidas por el movimiento del contorno de la burbuja se transmiten de forma prácticamente instantánea. Para captar la propagación ondulatoria de tales perturbaciones, habrá que irse a distancias del orden $r \sim \lambda$ (*far field*), siendo $\lambda \sim c_\infty/\omega_o$ la longitud de onda. A continuación, volveremos a adimensionalizar nuestro sistema de ecuaciones usando ahora la variable $\tilde{r}_* = r\omega_o/c_\infty$. Teniendo en cuenta que $c \simeq c_\infty$, obtenemos

$$\tilde{\nabla}_*^2 \psi_* + \frac{\partial h_*}{\partial t_*} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial \tilde{r}_*} \right) \frac{\partial h_*}{\partial \tilde{r}_*} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \psi_*}{\partial t_*} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \psi_*}{\partial \tilde{r}_*} \right)^2 + h_* = 0. \quad (3.10)$$

La solución aproximada para este problema se construye de la forma $\psi_* \simeq \Psi_0 + \epsilon \Psi_1$, $h_* \simeq H_0 + \epsilon H_1$, por lo que las ecuaciones para orden cero son

$$\tilde{\nabla}_*^2 \Psi_0 + \frac{\partial H_0}{\partial t_*} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial t_*} + H_0 = 0, \quad (3.11)$$

mientras que para el primer orden son

$$\tilde{\nabla}_*^2 \Psi_1 + \frac{\partial H_1}{\partial t_*} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t_*} + H_1 = 0. \quad (3.12)$$

Sobre cada sistema, los cuales representan un problema de propagación de ondas lineal, se deberán imponer unas condiciones de radiación en el infinito. Finalmente, para obtener una transición suave entre las soluciones para el campo cercano y lejano, se deben imponer a ambas una condiciones de acoplamiento para $r_* \rightarrow \infty$ y $\tilde{r}_* \rightarrow 0$.

La solución general de orden cero para las ecuaciones del campo cercano (3.7) será la correspondiente al movimiento radial de un flujo incompresible, es decir,

$$\psi_0 = -\frac{f_0(t_*)}{r_*} + g_0(t_*), \quad (3.13)$$

$$h_0 = \frac{f'_0(t_*)}{r_*} - g'_0(t_*) - \frac{1}{2} \frac{f_0^2(t_*)}{r_*^4}. \quad (3.14)$$

La evaluación de la condición de contorno cinemática sobre la burbuja nos permite obtener $f_0(t_*) = R_*^2 R'_*$. Por otro lado, la solución general de orden cero para campo lejano (3.11), una vez impuesta la condición de radiación, se escribe haciendo uso de la fórmula de d'Alembert

$$\Psi_0 = \frac{1}{\tilde{r}_*} [F_0(t_* - \tilde{r}_*) + G_0(t_* + \tilde{r}_*)] + \psi_\infty, \quad (3.15)$$

$$H_0 = -\frac{1}{\tilde{r}_*} [F'_0(t_* - \tilde{r}_*) + G'_0(t_* + \tilde{r}_*)], \quad (3.16)$$

siendo ψ_∞ una constante que representa el valor del potencial lejos de la burbuja. A su vez, la condición de acoplamiento para el potencial debe cumplir que $\lim_{r_* \rightarrow \infty} \psi_0 = \lim_{\tilde{r}_* \rightarrow 0} \Psi_0$, por lo que,

$$g_0(t_*) = \frac{F_0(t_*) + G_0(t_*)}{\tilde{r}_*} + G'_0(t_*) - F'_0(t_*) + \psi_\infty, \quad (3.17)$$

habiéndose usado el desarrollo de F_0 y G_0 alrededor de $\tilde{r}_* \simeq 0$. Finalmente se obtiene que $F_0(t_*) = -G_0(t_*)$ y $g_0(t_*) = 2G'_0(t_*) + \psi_\infty$, de manera que la solución de orden cero del problema se expresa

$$\psi_0 = -\frac{R_*^2 R'_*}{r_*} + 2G'_0(t_*) + \psi_\infty, \quad (3.18)$$

$$\Psi_0 = \frac{1}{\tilde{r}_*} [G_0(t_* + \tilde{r}_*) - G_0(t_* - \tilde{r}_*)] + \psi_\infty, \quad (3.19)$$

para el potencial de velocidades, y

$$h_0 = \frac{1}{r_*} [R_*^2 R''_* + 2R_* R_*'^2] - \frac{1}{2} \frac{R_*^4 R_*'^2}{r_*^4} - 2G''_0(t_*), \quad (3.20)$$

$$H_0 = -\frac{1}{\tilde{r}_*} [G'_0(t_* + \tilde{r}_*) - G'_0(t_* - \tilde{r}_*)], \quad (3.21)$$

para la entalpía. Este resultado tiene una interpretación inmediata: para el actual orden de perturbación, el campo lejano no está afectado por la presencia de la burbuja, viéndose reflejada la onda incidente G_0 sin ninguna alteración. Por otro lado, en el campo cercano, la superposición entre la onda incidente y la reflejada añade una componente espacialmente uniforme, representada por $2G'_0(t_*) + \psi_\infty$, al flujo incompresible creado por el movimiento radial de la burbuja. En este sentido, la burbuja percibe en sus alrededores un campo uniforme de extensión infinita.

Una vez resuelto el problema de perturbación de orden cero, corregiremos dicho resultado añadiendo la solución para el problema de primer orden. Para ello, la solución general de las ecuaciones del campo cercano (3.8) se escribe de manera análoga a como se hizo anteriormente,

$$\psi_1 = -\frac{f_1(t_*)}{r_*} + g_1(t_*), \quad (3.22)$$

$$h_1 = \frac{f'_1(t_*)}{r_*} - g'_1(t_*) - \frac{1}{2} \frac{f_0(t_*)f_1(t_*)}{r_*^4}, \quad (3.23)$$

En este caso, la evaluación de la condición de contorno cinemática nos proporciona $f_1(t_*) = 0$. De la misma manera que antes, la solución general de primer orden para las ecuaciones del campo lejano (3.12) se expresa según la fórmula de d'Alembert. Sin embargo, para considerar la existencia de la burbuja en esta región, la estructura de las ondas debe ser la correspondiente al campo radiado por esta debido a su movimiento. Así pues, escribimos

$$\Psi_1 = \frac{1}{\tilde{r}_*} F_1(t_* - \tilde{r}_*), \quad (3.24)$$

$$H_1 = -\frac{1}{\tilde{r}_*} F'_1(t_* - \tilde{r}_*), \quad (3.25)$$

habiéndose tenido en cuenta únicamente los términos asociados a ondas progresivas. La condición de acoplamiento para la solución completa se expresa $\lim_{r_* \rightarrow \infty} \epsilon^{-1}(\psi_0 + \epsilon\psi_1) = \lim_{\tilde{r}_* \rightarrow 0} \epsilon^{-1}(\Psi_0 + \epsilon\Psi_1)$, con lo que

$$-\frac{f_0(t_*)}{\epsilon r_*} + g_1(t_*) = \frac{F_1(t_*)}{\tilde{r}_*} - F'_1(t_*). \quad (3.26)$$

Observamos en este caso que $\epsilon r_* = \tilde{r}_* \rightarrow 0$, por lo que finalmente se obtiene $F_1(t_*) = -f_0(t_*)$ y $g_1(t_*) = f'_0(t_*)$. De esta manera, la solución de primer orden del problema se escribe

$$\psi_1 = R_*^2 R''_* + 2R_* R_*'^2, \quad (3.27)$$

$$\Psi_1 = -\frac{R_*^2(\tau_*) R'_*(\tau_*)}{\tilde{r}_*}, \quad (3.28)$$

para el potencial de velocidades, y

$$h_1 = -R_*^2 R_*''' - 6R_* R'_* R''_* - 2R_*'^3, \quad (3.29)$$

$$H_1 = \frac{1}{\tilde{r}_*} [R_*^2(\tau_*) R''_*(\tau_*) + 2R_*(\tau_*) R_*'^2(\tau_*)], \quad (3.30)$$

para la entalpía, siendo $\tau_* = t_* - \tilde{r}_*$ el tiempo retardado adimensional. Como se esperaba para este orden de perturbación, en el campo lejano existe una onda que se propaga

hacia el infinito, la cual es radiada debido al movimiento oscilatorio de la burbuja. Esta onda representa entonces las pérdidas mecánicas debido a la reradiación de energía acústica.

3.2.2. Ecuaciones para las oscilaciones radiales

Una vez evaluadas todas las condiciones de acoplamiento y construida la solución general, haremos uso de la condición dinámica de contorno con el fin de escribir la ecuación diferencial para el radio R_* de la burbuja. Así pues, usando las soluciones (3.20) y (3.29) para el campo cercano, tenemos que $h_*(R_*) = h_0(R_*) + \epsilon h_1(R_*) = h_{L*}$, y por tanto

$$R_* R_*'' + \frac{3}{2} R_*'^2 - \epsilon (R_*^2 R_*''' + 6 R_* R_*' R_*'' + 2 R_*'^3) = h_{L*} + 2G_0''. \quad (3.31)$$

Esta ecuación es general y modela la dinámica de la burbuja con un error del orden de ϵ^2 . Se observa que el término correspondiente a $2G_0''$ está directamente relacionado con la perturbación de presión acústica impuesta desde el exterior $p_a(t)$.

A partir de la expresión (3.31) se deriva la conocida ecuación de **Rayleigh-Plesset** simplemente haciendo $\epsilon = 0$ [Plesset (1960)]. Por tanto, en variables con dimensiones obtenemos

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_\infty}(p_L - p_a - p_\infty), \quad (3.32)$$

donde la entalpía del líquido en el contorno de la burbuja se ha aproximado por $h_L \simeq (p_L - p_\infty)/\rho_\infty$. Como revela esta ecuación, válida para líquidos incompresibles, la inercia de las oscilaciones de la burbuja es debida a la diferencia de presiones entre su contorno exterior y el medio que la rodea. Por otro lado, la ecuación de **Herring-Trilling** se deriva despejando previamente R_*''' de la ecuación de Rayleigh-Plesset adimensional, es decir $R_*''' = (2G_0''' + h_{L*}' - 4R_*' R_*'')/R_*$, con lo cual, en variables con dimensiones queda [Trilling (1952)]

$$\begin{aligned} R\ddot{R} \left(1 - \frac{2\dot{R}}{c_\infty}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{4\dot{R}}{3c_\infty}\right) &= \\ &= \frac{1}{\rho_\infty} \left(1 + \frac{R}{c_\infty} \frac{d}{dt}\right) (p_L - p_a - p_\infty). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalmente, la ecuación de **Keller-Miksis** se puede derivar de igual forma reescribiendo $R_*''' = (2G_0''' + h_{L*}' - 5R_*' R_*'')/R_* + R_*' R_*''/R_*$, y substituyendo el último término usando de nuevo la ecuación de Rayleigh-Plesset, es decir $R_*' R_*''/R_* = R_*' (2G_0'' + h_{L*} - \frac{3}{2} R_*'^2)/R_*^2$. De esta manera se obtiene [Keller (1980)]

$$\begin{aligned} R\ddot{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_\infty}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_\infty}\right) &= \\ &= \frac{1}{\rho_\infty} \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_\infty} + \frac{R}{c_\infty} \frac{d}{dt}\right) (p_L - p_a - p_\infty). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nótese que las distintas formas de expresar el término R_*''' en función de las aceleraciones y velocidades del contorno, nos llevará a generar una familia de ecuaciones, todas ellas con el mismo orden de precisión, para la dinámica radial de la burbuja [Prosperetti (1986)]. Como se demuestra, la solución de la ecuación de Rayleigh-Plesset (3.32), al ser de orden cero en ϵ (movimiento incompresible de la fase líquida),

contendrá errores máximos del orden del número de Mach. Sin embargo, como se observa en la Fig. 3.1, los errores que se cometen al resolver las ecuaciones de Herring (3.33) y de Keller-Miksis (3.34) serán del orden de ϵ^2 , por lo que constituyen modelos más precisos para el análisis de los colapsos violentos que se producen en los fenómenos de cavitación [Lauterborn (1976)] y sonoluminiscencia [Brenner (2002)]

A continuación completaremos la formulación del problema evaluando la condición de salto que relaciona la presión del líquido p_L en el contorno externo a la burbuja, con la presión del gas en el interior p_g . Esta condición de salto nos dice que la diferencia de tensiones normales a un lado y otro del contorno está compensada con la tensión superficial, es decir $\mathbf{n} \cdot (\bar{\tau}_L - \bar{\tau}_g) \cdot \mathbf{n} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} = 2\sigma/R$. En el lado del líquido, incompresible en primera aproximación, la componente radial de la tensión se puede escribir como $\tau_{L_{rr}} = -p_L + 2\mu_L(\partial u/\partial r)_R = -p_L - 4\mu_L \dot{R}/R$, siendo μ_L su viscosidad. En el lado del gas, cuya viscosidad es despreciable frente a la del líquido, será simplemente $\tau_{g_{rr}} = -p_g$, por lo que finalmente obtenemos

$$p_L = p_g - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R}. \quad (3.35)$$

Comprobamos que, para una burbuja inicialmente en reposo y equilibrio, su presión interna es $p_{g0} = p_\infty + 2\sigma/R_o$, la cual se corresponde con la presión de Laplace.

Para cerrar el presente problema, necesitamos conocer la evolución de la presión del gas p_g en el contorno de la burbuja. Para ello, es típico establecer que el gas evoluciona de forma politrópica, siguiendo la ley

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-3\kappa}, \quad (3.36)$$

siendo κ el coeficiente politrópico, el cual puede alcanzar valores entre $\kappa = 1$ (comportamiento isotérmico) y $\kappa = \gamma$ (comportamiento adiabático). Como veremos, el carácter termodinámico de las oscilaciones de la burbuja puede analizarse atendiendo al valor del número de Péclet en el gas, el cual relaciona el transporte convectivo de energía con la transmisión de calor por conducción en su interior. Si bien la ley de evolución politrópica puede considerarse exacta para los valores límites de κ , los análisis realizados en la Sec. 3.2.3 y Sec. 3.2.4 nos permitirán formular una nueva ley corregida, la cual será más fidedigna para valores intermedios [Prosperetti (1988), Prosperetti (1991)].

3.2.3. Problema interior: movimiento de la fase gaseosa

La correcta caracterización del comportamiento termodinámico de las oscilaciones de la burbuja pasa por el análisis detallado del problema interno. Para ello, la presión p_g del gas, cuya densidad es ρ_g y su viscosidad es μ_g , debe ser obtenida resolviendo las ecuaciones de conservación en este dominio, es decir

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \mathbf{v}_g) = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \mathbf{v}_g + \frac{1}{\rho_g} \nabla p_g = \frac{1}{\rho_g} \nabla \cdot \bar{\tau}_g, \quad (3.38)$$

$$\rho_g \frac{De_g}{Dt} + p_g \nabla \cdot \mathbf{v}_g = \nabla \cdot (K_g \nabla T_g), \quad (3.39)$$

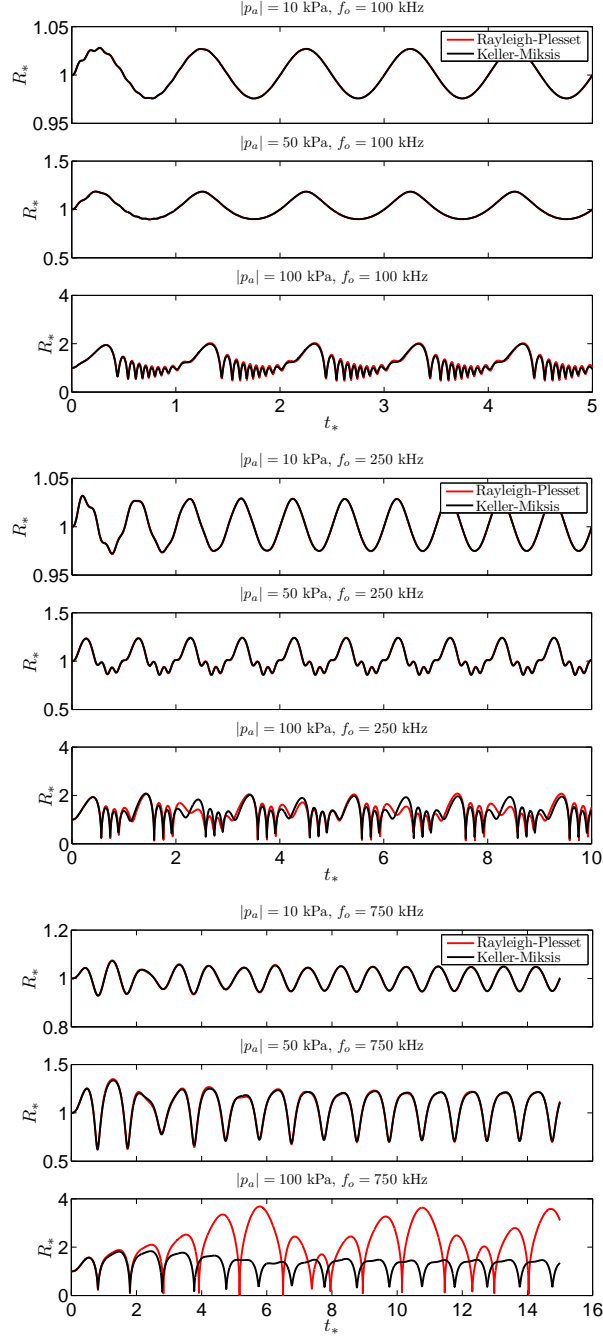


Figura 3.1: Evolución isotérmica ($\kappa = 1$) del radio de una burbuja de aire inmersa en agua, con un radio de equilibrio $R_o = 3 \mu\text{m}$, excitada por una onda sinusoidal de amplitud $|p_a| = P_a$ y frecuencia $f_o = 2\pi\omega_o$. La solución de la ecuación de Rayleigh-Plesset comienza a presentar divergencias con respecto a la de Keller-Miksis generalmente para valores altos de la presión de excitación acústica y frecuencias cercanas a la de resonancia (definida en la Sec. 3.3). En este punto, las altas velocidades de colapso y posteriores rebotes hacen que el medio líquido que rodea la burbuja presente ciertos efectos compresibilidad.

siendo D/Dt el operador derivada sustancial o total, y K_g la conductividad del gas. Considerando un gas ideal, la ecuación de estado se escribe $p_g = \rho_g R_g T_g = (\gamma - 1) \rho_g c_v T_g$, y la energía interna se podrá expresar como $e_g = c_v T_g$. Igual que en el movimiento de la fase líquida, la configuración del campo de velocidades será $\mathbf{v}_g = u_g(r) \mathbf{u}_r$, siendo u_g la velocidad radial. Así pues, las condiciones de contorno en $r = 0$ son, por simetría, $u_g = \partial p_g / \partial r = \partial T_g / \partial r = 0$. Por otro lado, en $r = R$, debe cumplirse la condición cinemática $u_g = \dot{R}$, y la continuidad en temperaturas y en flujos de calor. Como se demostrará más adelante, una buena aproximación ampliamente usada en la literatura es establecer que $T_g|_R = T_\infty$, siendo T_∞ la temperatura de equilibrio del líquido

Realizando un análisis dimensional sobre la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (3.38), comprobamos que los esfuerzos viscosos se pueden despreciar frente a las fuerzas de presión. Esto se justifica ya que $\nabla \cdot \bar{\tau}_g / \nabla p_g \sim \mu_g \omega_o / p_{g0} \ll 1$. Por otro lado, se obtiene que las variaciones de presión dentro de la burbuja son del orden $\Delta p_g / p_{g0} \sim \text{Eu}^{-1}$, donde $\text{Eu} = \rho_{g0} U^2 / p_{g0}$ es el número de Euler. Dado que la velocidad del sonido en el gas se puede expresar como $c_g \simeq (p_{g0} / \rho_{g0})^{1/2}$, tendremos que $\Delta p_g / p_{g0} \sim \text{Ma}_g^2$, siendo $\text{Ma}_g = U / c_g$ el número de Mach en el contorno de la burbuja. Si asumimos que este número es generalmente pequeño, concluimos finalmente que $\Delta p_g / p_{g0} \ll 1$, con lo que la presión del gas se podrá considerar aproximadamente uniforme, es decir, $p_g \simeq p_g(t)$. Haciendo uso de la ecuación de continuidad (3.37) y de la ecuación de estado para gases perfectos, la ecuación de conservación de la energía interna (3.39) se puede escribir

$$\frac{r^2}{\gamma - 1} \frac{\partial p_g}{\partial t} + \frac{\gamma p_g}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_g) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 K_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \right), \quad (3.40)$$

cuya integración sobre r da lugar a la siguiente expresión para la velocidad radial,

$$u_g = \frac{1}{\gamma p_g} \left[(\gamma - 1) K_g \frac{\partial T_g}{\partial r} - \frac{r \dot{p}_g}{3} \right]. \quad (3.41)$$

Esta expresión, evaluada en el contorno $r = R$, nos proporciona finalmente una ecuación diferencial para la presión del gas,

$$\dot{p}_g = \frac{3}{R} \left[(\gamma - 1) K_g \frac{\partial T_g}{\partial r} \Big|_R - \gamma p_g \dot{R} \right], \quad (3.42)$$

la cual relaciona la presión en el interior de la burbuja con la velocidad de sus oscilaciones y la transferencia de calor a través de su contorno.

Si en vez de la ecuación de conservación de la energía interna usamos la ecuación de la entalpía, es decir $\rho_g Dh_g / Dt - Dp_g / Dt = \nabla \cdot (K_g \nabla T_g)$, podemos plantear directamente la ecuación para el campo de temperaturas en el interior de la burbuja. Haciendo previamente $h_g = c_p T_g$, y asumiendo una conductividad constante, se obtiene la ecuación de difusión térmica para un fluido en movimiento,

$$\frac{\partial T_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial T_g}{\partial r} - D_g \nabla^2 T_g = \frac{D_g}{K_g} \dot{p}_g, \quad (3.43)$$

donde se ha identificado la difusividad térmica del gas $D_g = K_g / \rho_g c_p$. La triada de ecuaciones (3.41), (3.42) y (3.43) componen un sistema no lineal que cierra el problema del movimiento del gas en el interior de la burbuja. En el contorno de la burbuja,

como ya se comentó, la condición correcta para el campo de temperaturas implica la continuidad tanto en temperatura como en flujos de calor. El flujo de calor hacia la interfase se puede estimar usando el espesor característico de la capa límite térmica $\delta_T \sim (D/\omega_o)^{1/2}$ en ambos lados del contorno de la burbuja, siendo D la difusividad térmica de cualquiera de las fases. Así pues, tenemos que $q_g \sim K_g(T_g|_0 - T_g|_R)/\delta_{Tg}$ y $q_L \sim K_L(T_L|_R - T_\infty)/\delta_{TL}$ respectivamente. La igualdad en temperaturas en la interfase implica que $T_g|_R = T_L|_R = T_w$. Por otro lado, la equivalencia de flujos de calor revela

$$\frac{T_w - T_\infty}{T_g|_0 - T_w} \sim \frac{K_g \delta_{TL}}{K_L \delta_{Tg}} \sim \frac{K_g}{K_L} \left(\frac{D_L}{D_g} \right)^{1/2} \ll 1, \quad (3.44)$$

con lo cual $T_w \simeq T_\infty$. Finalmente se concluye que la temperatura del gas en el contorno es prácticamente constante e igual a la temperatura del líquido $T_g|_R = T_\infty$, lo que nos permite desacoplar el problema térmico interior del exterior [Prosperetti (1988)]. Este resultado se debe a que el líquido, en comparación con el gas, tiene una conductividad y una capacidad calorífica mucho mayor, por lo que cualquier flujo de calor es difundido rápidamente por toda la masa sin variar de forma apreciable su temperatura.

3.2.4. Comportamiento termodinámico linealizado

A continuación obtendremos el campo de temperaturas en el interior de la burbuja para el caso en que las oscilaciones de la burbuja sean muy pequeñas, es decir $R \simeq R_o(1 + X)$, siendo las perturbaciones radiales $|X| \ll 1$. La linealización alrededor del estado imperturbado nos permite escribir la ecuación de difusión térmica (3.43) como $\partial T_g / \partial t - D_g \nabla^2 T_g = \dot{p}_g D_g / K_g$. Si adimensionalizamos esta ecuación usando las variables $t_* = t\omega_o$, $r_* = r/R_o$, $R_* = R/R_o$, $T_{g*} = (T_g - T_\infty)/T_\infty$ y $p_{g*} = p_g/p_{g0}$, nos queda

$$\frac{\partial T_{g*}}{\partial t_*} - \frac{1}{\text{Pe}} \nabla_*^2 T_{g*} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) p'_{g*}, \quad (3.45)$$

siendo $\text{Pe} = \omega_o R_o^2 / D_g$ el número de Péclet, el cual relaciona la velocidad del gas con la velocidad de difusión térmica. A su vez, este número nos proporciona una estimación para la relación entre el espesor de la capa límite térmica y el tamaño de la burbuja, $\text{Pe}^2 \sim R_o / \delta_{Tg}$. Asumiendo unas oscilaciones monocromáticas de frecuencia ω_o , expresadas de la forma $X = \hat{X} \exp(-it_*)$, la expresión (3.45) finalmente se transforma en

$$\nabla_*^2 \hat{T}_{g*} + i\text{Pe} \hat{T}_{g*} = i\text{Pe} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \hat{p}_{g*}, \quad (3.46)$$

cuya solución, la cual debe ser regular en el origen, se puede expresar en términos de la función esférica de Bessel de orden cero j_0 . La condición de contorno en $r_* = R_*$, dada la naturaleza de las pequeñas oscilaciones, se puede escribir como $\hat{T}_{g*}|_1 = 0$. Una vez evaluada, el campo de temperaturas queda finalmente

$$\hat{T}_{g*} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \hat{p}_{g*} \left[1 - \frac{j_0(r_* \sqrt{i\text{Pe}})}{j_0 \sqrt{i\text{Pe}}} \right]. \quad (3.47)$$

El gradiente de temperatura en el contorno, necesario para el cálculo de la presión del gas, alcanzará entonces un valor

$$\left. \frac{\partial \hat{T}_{g*}}{\partial r_*} \right|_1 = - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \hat{p}_{g*} \left(\sqrt{i\text{Pe}} \cot \sqrt{i\text{Pe}} - 1 \right). \quad (3.48)$$

Una vez encontrada la expresión analítica del campo de temperaturas en el interior de la burbuja, evaluaremos la presión del gas usando la ecuación diferencial (3.42). Linealizándola entorno al estado inicial de reposo, e introduciendo posteriormente las variables adimensionales antes definidas, podemos escribir $p'_{g*} = 3\gamma/\text{Pe}(\partial T_{g*}/\partial r_*)_1 - 3\gamma X'$. Como se hizo antes, asumiremos oscilaciones monocromáticas, obteniéndose

$$\hat{p}_{g*} = -\frac{3\gamma}{i\text{Pe}} \left. \frac{\partial \hat{T}_{g*}}{\partial r_*} \right|_1 - 3\gamma \hat{X}. \quad (3.49)$$

Introduciendo el valor del gradiente de temperatura en el contorno dado por (3.48), la presión del gas adimensional se podrá expresar finalmente como $\hat{p}_{g*} = -\Phi \hat{X}$, siendo Φ la siguiente función compleja

$$\Phi = \frac{3\gamma}{1 - \frac{3(\gamma-1)}{i\text{Pe}} \left(\sqrt{i\text{Pe}} \cot \sqrt{i\text{Pe}} - 1 \right)}. \quad (3.50)$$

Esta función relaciona la presión interna del gas con las perturbaciones de pequeña amplitud del radio de la burbuja, pudiéndose descomponer $\hat{p}_{g*} = -\hat{X}\text{Re}\Phi - i\hat{X}\text{Im}\Phi$. Es decir, la presión del gas posee dos componentes, representadas en la Fig. 3.2, proporcionales a la amplitud de las oscilaciones (asociada a la rigidez), y a la velocidad (asociada a la disipación térmica) respectivamente [Prosperetti (1988)].

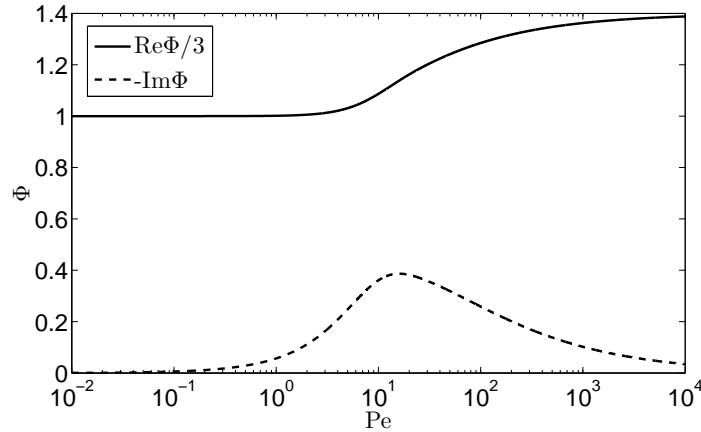


Figura 3.2: Parte real (rigidez) e imaginaria (disipación térmica) de la función Φ para una burbuja de aire ($\gamma = 1.4$).

Como se comprueba, la ley de evolución politrópica (3.36) para la presión del gas, que expresada de forma adimensional se escribe $p_{g*} = R_*^{-3\kappa}$, es incompleta ya que únicamente establece proporcionalidad con la amplitud de dichas oscilaciones. Efectivamente, tras su linealización, y asumiendo oscilaciones monocromáticas, nos queda $\hat{p}_{g*} = -3\kappa \hat{X}$, identificándose el exponente $\kappa = \text{Re}\Phi/3$ con el término de rigidez de la burbuja [Crum (1983)]. Así pues, con el fin de corregir dicha expresión, se plantea añadirle la componente de disipación térmica, proporcional a la velocidad de las oscilaciones, que resulta del análisis lineal efectuado en la presente sección. La expresión corregida que cumple estas modificaciones se escribe finalmente

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-3\kappa} - 4\mu_{th} \frac{\dot{R}}{R}, \quad (3.51)$$

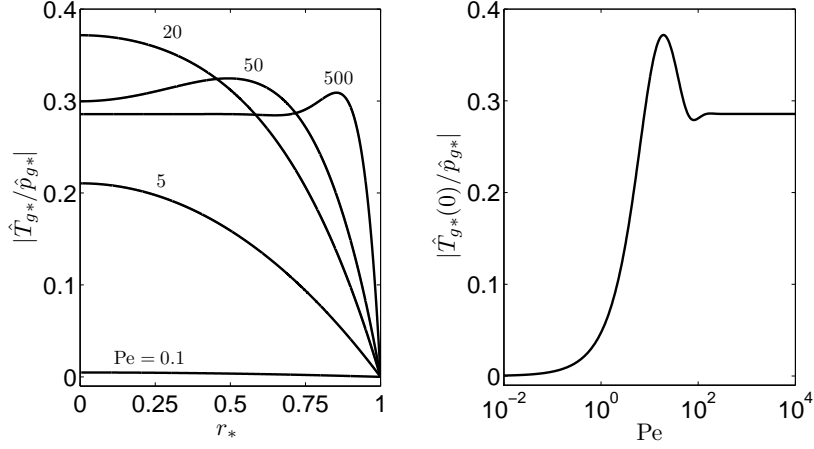


Figura 3.3: Izquierda: Perfil de temperaturas en el interior de una burbuja de aire ($\gamma = 1.4$), normalizado por la presión del gas, para distintos valores del número de Péclet. Se comprueba que, para $Pe \ll 1$, el espesor de la capa límite térmica es $\delta_{T_g} \gg R_o$. Por el contrario, para $Pe \gg 1$ se tiene que $\delta_{T_g} \ll R_o$. Derecha: Variación de la temperatura en el centro de la burbuja en función del número de Péclet. Se puede observar la transición del comportamiento isotérmico al adiabático a medida que aumenta Pe .

siendo $\mu_{th} = -p_{g0}\text{Im}\Phi/4\omega_o$ un coeficiente de viscosidad térmica ficticio, el cual será definido en la Sec. 3.3 [Devin (1959), Chapman (1972), Prosperetti (1974)]. Nótese que la validez de la corrección de esta ley está restringida únicamente al régimen de pequeñas oscilaciones causadas por una excitación monocromática de frecuencia ω_o . Sin embargo, su aplicación más allá del régimen lineal puede considerarse igualmente satisfactoria debido a que los errores con respecto a la solución completa de las ecuaciones de la fase gaseosa no son relevantes [Prosperetti (1988)].

La Fig. 3.2 nos muestra que para $Pe \ll 1$, el exponente politrópico es aproximadamente $\kappa = \text{Re}\Phi/3 \simeq 1$, lo que establece un comportamiento isotérmico del gas durante las oscilaciones. En esta situación, la velocidad del gas será mucho menor que la velocidad de difusión térmica, $U \ll D_g/R_o$, por lo que la temperatura alcanza con rapidez un valor homogéneo y constante dentro de la burbuja. Efectivamente, la ecuación de difusión térmica (3.46), en este límite, se puede aproximar por $\nabla_*^2 \hat{T}_{g*} \simeq 0$, con lo que el perfil de temperaturas, como se muestra en la Fig. 3.3, resulta $\hat{T}_{g*} \simeq 0$. Por el contrario, para $Pe \gg 1$, el exponente politrópico tiende a $\kappa = \text{Re}\Phi/3 \simeq \gamma$, estableciendo un comportamiento adiabático. En esta otra situación, la velocidad del gas será mucho mayor que la velocidad de difusión térmica, $U \gg D_g/R_o$, por lo que la burbuja no puede desalojar calor durante su movimiento, variando en consecuencia su temperatura. En efecto, el perfil de temperaturas se aproxima ahora por $\hat{T}_{g*} \simeq \hat{p}_{g*}(\gamma - 1)/\gamma$, que no es más que la relación adiabática linealizada entre temperatura y presión para un gas ideal.

3.3. Dinámica lineal de burbujas

Una vez hallada la expresión exacta para la presión del gas en el interior de la burbuja en el límite de pequeñas oscilaciones, obtendremos el valor de la amplitud dichas perturbaciones realizando un análisis lineal sobre la ecuación general de la dinámica de

la burbuja. Así pues, linealizando la ecuación (3.31) alrededor del radio de equilibrio R_o , obtenemos

$$X'' - \epsilon X''' = \text{Eu}(p_{L*} - p_{a*} - p_{\infty*}), \quad (3.52)$$

donde los términos de presión adimensional se escriben $p_* = p/p_{g0}$. En este caso, $\text{Eu} = p_{g0}/\rho_\infty U^2$ es el número de Euler para el movimiento del líquido. Si introducimos la condición de salto (3.51) linealizada, y asumimos una excitación acústica y oscilaciones monocromáticas de la forma $p_{a*} = P_{a*} \exp(-i\omega_o t)$ y $X = \hat{X} \exp(-i\omega_o t)$ respectivamente, se llega a

$$\hat{X} + i\epsilon \hat{X} = \text{Eu} (\hat{p}_{g*} + W \hat{X} + iM \hat{X} - P_{a*}), \quad (3.53)$$

donde se han definido los parámetros de tensión superficial $W = 2\sigma/p_{g0}R_o$ y de viscosidad $M = 4\mu_L\omega_o/p_{g0}$. Substituyendo el valor hallado anteriormente para la presión del gas, es decir, $\hat{p}_{g*} = -\hat{X}\text{Re}\Phi - i\hat{X}\text{Im}\Phi$, obtenemos

$$\hat{X} = \frac{-\text{Eu} P_{a*}}{(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma} = \frac{-P_a/\rho_\infty\omega_o^2 R_o^2}{(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma}, \quad (3.54)$$

resultado que se corresponde con la función de transferencia de un oscilador armónico amortiguado. En la expresión (3.54) se ha identificado, por tanto, la frecuencia natural de las oscilaciones $\omega_n = [p_{g0}(\text{Re}\Phi - W)/\rho_\infty R_o^2]^{1/2}$, y el coeficiente de amortiguamiento $\Gamma = \text{Eu}(M + \epsilon/\text{Eu} - \text{Im}\Phi)$. Nótese que estamos tratando con una amplitud compleja, la cual se puede escribir como $\hat{X} = |\hat{X}| \exp(i\phi)$, siendo ϕ el desfase de las oscilaciones con respecto a la excitación.

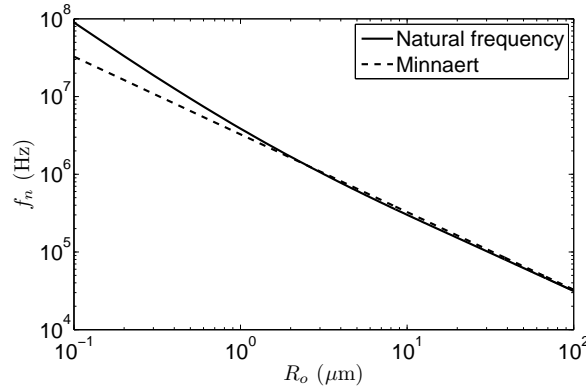


Figura 3.4: Frecuencia natural $f_n = 2\pi\omega_n$ de las oscilaciones de una burbuja de aire esférica. La tendencia inversamente proporcional $f_n \propto R_o^{-1}$ se rompe para burbujas de menos de $1 \mu\text{m}$ debido al acusado incremento de la presión de Laplace provocado por la tensión superficial.

3.3.1. Oscilaciones lineales y frecuencia natural

Realizando un análisis lineal sobre la ecuación general para las oscilaciones de la burbujas, hemos llegado a un resultado para la amplitud de estas similar al de un oscilador armónico amortiguado. Hemos visto que la frecuencia natural correspondiente a este oscilador se expresa como

$$\omega_n = \left[\frac{p_{g0} (\text{Re}\Phi - W)}{\rho_\infty R_o^2} \right]^{1/2}, \quad (3.55)$$

la cual decae a medida que crece el radio como se observa en la Fig. 3.4. Además, se demuestra que para el régimen de oscilaciones adiabáticas y tensión superficial despreciable, esta frecuencia natural se puede aproximar por la conocida frecuencia de Minnaert, $\omega_n = (3\gamma p_\infty / \rho_\infty R_o^2)^{1/2}$, la cual es válida generalmente para burbujas de gran tamaño [Minnaert (1933)]. Como se puede comprobar de manera aproximada, la relación entre el tamaño de la burbuja y la longitud de onda para una burbuja excitada a su frecuencia natural será $\omega_n R_o / c_\infty \sim 10^{-2}$ para burbujas mayores de $1 \mu\text{m}$. Esto significa que el comportamiento resonante de las burbujas se alcanza para excitaciones de gran longitud de onda, quedando justificada la hipótesis de oscilaciones puramente radiales en este régimen.

Como muestra la Fig. 3.5, la amplitud de las oscilaciones presenta un pico de resonancia coincidente con la frecuencia natural de la burbuja. La altura y ancho de banda de este pico está controlado por los términos de amortiguamiento. De hecho, los efectos resonantes tienden a desaparecer para nanoburbujas de menos de 100 nm , donde las oscilaciones están altamente amortiguadas debido a una gran disipación viscosa. Se puede comprobar que para altas frecuencias de excitación, $\omega_o \gg \omega_n$, la amplitud de las oscilaciones sufren un decaimiento proporcional a $|\hat{X}| \propto \text{Eu} \propto \omega_o^{-2}$ en la región donde se cumple que $\omega_o R_o / c_\infty \ll 1$ (excitaciones de gran longitud de onda). En este límite, la respuesta de la burbuja es muy débil, siendo sus oscilaciones prácticamente despreciables. En contraste, para excitaciones de baja frecuencia, $\omega_o \ll \omega_n$, la amplitud alcanza un valor constante y proporcional a $|\hat{X}| \propto (3 - W)^{-1}$, que no es más que la solución cuasi-estática de la ecuación del movimiento linealizada.

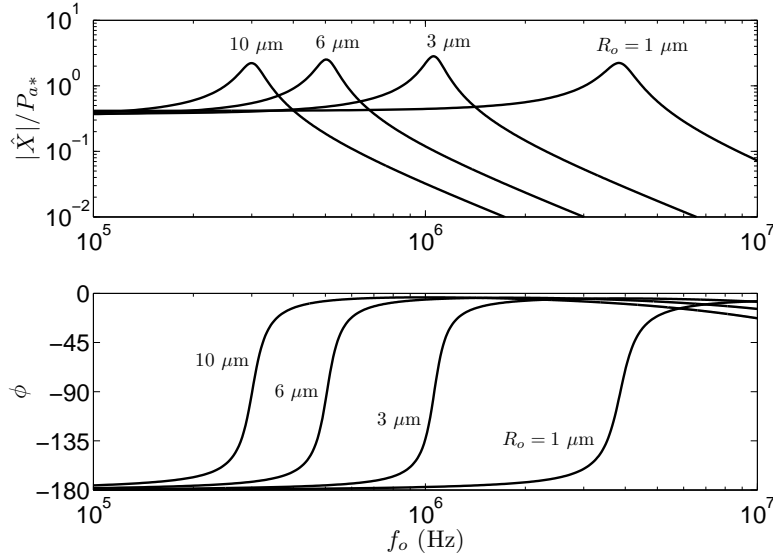


Figura 3.5: Amplitud y fase de las oscilaciones lineales para burbujas de distintos tamaños excitadas por una señal acústica monocromática p_{a*} .

Por otro lado, vemos también que la fase de las oscilaciones con respecto a la excitación cambia de forma repentina en la resonancia, pasando de $-\pi$ a un valor aproximadamente nulo. Esto significa que, a bajas frecuencias de excitación, las oscilaciones de la burbuja se adaptan a las condiciones externas de presión acústica (ambas señales están completamente fuera de fase: cuando la presión externa sea máxima, el radio de la burbuja será mínimo y viceversa). Por el contrario, para frecuencias altas, la dinámi-

ca de la burbuja no es lo suficiente rápida como para adaptarse a tales variaciones de presión acústica, comenzando a oscilar en fase con respecto a la excitación externa. Sin embargo, una burbuja excitada a su frecuencia natural, realizará siempre oscilaciones con un desfase exactamente de $-\pi/2$.

3.3.2. Coeficiente de amortiguamiento

A continuación analizaremos el comportamiento del coeficiente de amortiguamiento Γ , el cual depende fuertemente del tamaño de la burbuja y de la frecuencia de excitación. Como se ve, este coeficiente está compuesto por tres contribuciones distintas, es decir $\Gamma = \Gamma_{vis} + \Gamma_{ac} + \Gamma_{th}$, y cada una de ellas representa un mecanismo de disipación de energía diferente [Devin (1959), Eller (1970), Chapman (1972), Prosperetti (1977)]:

- Amortiguamiento viscoso,

$$\Gamma_{vis} = \text{Eu}M = \frac{4\mu_L}{\rho_\infty \omega_o R_o^2}, \quad (3.56)$$

causado por las pérdidas asociadas a la fricción molecular durante el movimiento del contorno de la burbuja, transformando parte de su energía cinética en calor.

- Amortiguamiento acústico,

$$\Gamma_{ac} = \epsilon = \frac{\omega_o R_o}{c_\infty}, \quad (3.57)$$

causado por las pérdidas asociadas a la reradiación de energía debido a la compresibilidad del medio. Efectivamente, durante las oscilaciones, la burbuja devuelve al líquido parte de su energía mecánica, la cual se propaga hacia el infinito como una onda de presión.

- Amortiguamiento térmico,

$$\Gamma_{th} = -\text{Eu} \text{Im}\Phi = -\frac{p_{g0}}{\rho_\infty \omega_o^2 R_o^2} \text{Im}\Phi, \quad (3.58)$$

causado por las pérdidas asociadas a la transferencia neta de calor por conducción a través del contorno de la burbuja durante las etapas de compresión y expansión.

Es común en la literatura agrupar estas tres componentes del amortiguamiento en un solo coeficiente a través de la definición de una viscosidad efectiva μ_E , la cual tiene en cuenta los efectos disipativos de la radiación de energía acústica y de la conducción térmica [Brennen (1995)]. Así pues, se define $\mu_E = \mu_L + \mu_{ac} + \mu_{th}$, donde

$$\mu_{ac} = \frac{\rho_\infty \omega_o^2 R_o^3}{4c_\infty} \quad \text{y} \quad \mu_{th} = -\frac{p_{g0}}{4\omega_o} \text{Im}\Phi \quad (3.59)$$

son la viscosidad acústica y la viscosidad térmica respectivamente. Con esto, el coeficiente Γ y el factor de amortiguamiento $d = \frac{1}{2}\omega_o \Gamma$ se pueden escribir de forma más compacta haciendo respectivamente

$$\Gamma = \frac{4\mu_E}{\rho_\infty \omega_o R_o^2} \quad \text{y} \quad d = \frac{2\mu_E}{\rho_\infty R_o^2}. \quad (3.60)$$

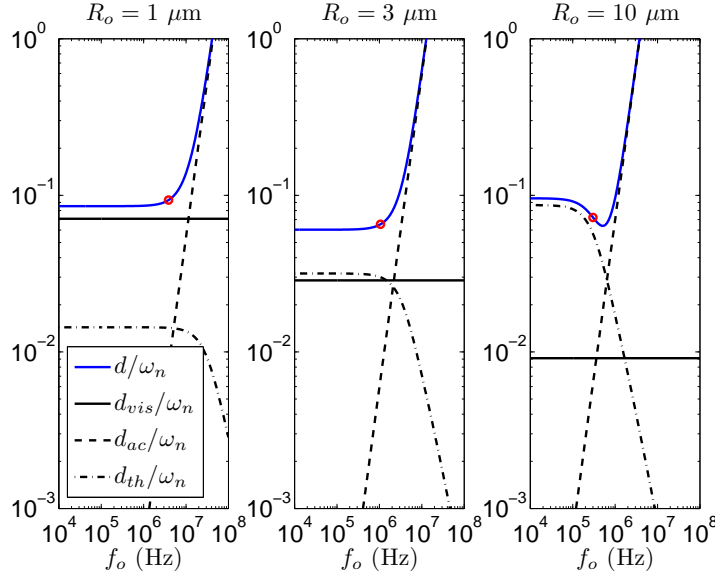


Figura 3.6: Comportamiento del factor de amortiguamiento d en función de la frecuencia de excitación f_o , para una burbuja de aire inmersa en agua. El punto de color rojo se corresponde con el valor para la frecuencia natural.

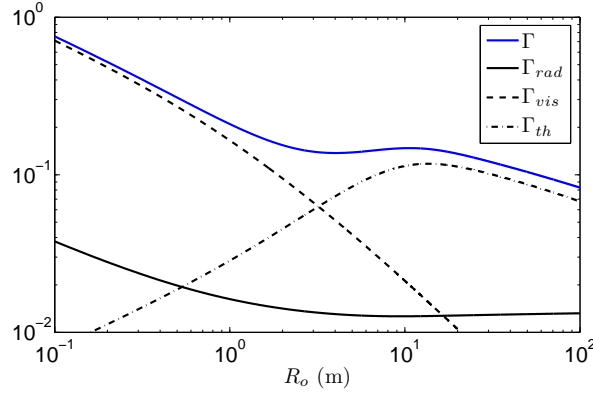


Figura 3.7: Coeficientes de amortiguamiento Γ para una burbuja excitada a su frecuencia natural $\omega_o = \omega_n$.

La Fig. 3.6 muestra que las pérdidas por reradiación de energía acústica son el mecanismo de amortiguamiento principal para las oscilaciones de alta frecuencia, independientemente del tamaño de la burbuja. Sin embargo, para bajas frecuencias e incluso en la resonancia, encontramos que el amortiguamiento viscoso domina para burbujas de menos de $1 \mu\text{m}$, mientras que el térmico lo hace para aquellas mayores de $10 \mu\text{m}$. Por otro lado, se puede comprobar en la Fig. 3.7 que, en la frecuencia de resonancia, las pérdidas debidas a la disipación viscosa y térmica están altamente acopladas para burbujas de entre $1 \mu\text{m}$ y $10 \mu\text{m}$, mientras que el amortiguamiento acústico, aproximadamente constante para burbujas de tamaño micrométrico, es siempre despreciable. Este fenómeno hace que el coeficiente de amortiguamiento en la resonancia se pueda considerar uniforme, con un valor de $\Gamma \simeq 0.14$, en este rango de tamaños, presentando incluso un valor mínimo para burbujas de $R_o \simeq 4 \mu\text{m}$. En particular, para burbujas de

aire con radio dentro del rango antes comentado, el número de Péclet en la resonancia variará entre $Pe \simeq 1$ y $Pe \simeq 10$. Según la Fig. 3.2, esto nos permite establecer de forma general que las oscilaciones de estas burbujas serán prácticamente isotérmicas ($\kappa \simeq 1$). Sin embargo, los efectos de disipación térmica deberán tenerse en cuenta, pudiendo ser solamente ignorados para aquellas burbujas de menos de $1 \mu\text{m}$.

Los resultados anteriores nos indican la conveniencia del uso de microburbujas de estos tamaños para aplicaciones clínicas. Así pues, el uso de tales microburbujas como agentes de contrastes ultrasónicos se justifica por los siguientes hechos: (a) Su reducido tamaño les permite circular por el torrente sanguíneo sin riesgo de obstrucciones, ya que los capilares más pequeños (presentes en el árbol pulmonar) poseen un tamaño típico de entre $8 \mu\text{m}$ y $10 \mu\text{m}$. (b) La frecuencia natural de estas burbujas varía entre 0.5 MHz y 4 MHz, valores típicamente utilizados en las técnicas de ecografía médica por ultrasonidos. Una burbuja excitada a la frecuencia de resonancia presenta una mayor respuesta dinámica y, por tanto, mayor eco o dispersión (*scattering*) acústica, lo que es esencial para su uso como agente de contraste en imágenes ecográficas. (c) Como se ha visto, estas microburbujas presentan un mínimo de disipación de energía en torno a $4 \mu\text{m}$, lo que optimiza la respuesta dinámica resonante y la consiguiente intensidad de *scattering* con respecto a burbujas de menor tamaño.

3.3.3. Umbral del comportamiento no lineal

Los resultados y el análisis teórico realizado en las secciones 3.3 y 3.2.4 parten de suponer un comportamiento lineal en las oscilaciones de la burbuja, es decir, $R = R_o(1 + X)$ con $|X| \ll 1$. Para alcanzar este límite, es necesario que la presión acústica sea, en primera instancia, $P_a \ll p_\infty$. Sin embargo, dependiendo del tamaño de la burbuja y de la frecuencia de excitación, el umbral de presión que marca el inicio del comportamiento no lineal puede variar. A continuación obtendremos dichos umbrales a través de la comparación directa de la solución lineal (3.54) con la solución exacta usando la ecuación de Keller-Miksis (3.34) para el cálculo de las oscilaciones radiales de una burbuja excitada de forma sinusoidal.

El criterio para definir este umbral será un error relativo máximo ϵ de un 5 % en régimen permanente entre ambas soluciones. Como se observa en la Fig. 3.8, este error está íntimamente relacionado con la presencia no despreciable de armónicos de frecuencias superiores a la de excitación en el espectro de las oscilaciones. Por lo tanto, podremos decir que las presiones acústicas aplicadas por debajo de este umbral no provocarán, en primera aproximación, un comportamiento no lineal en la dinámica de la burbuja. En la Fig. 3.9 vemos que el umbral mínimo de presión acústica sobre una burbuja de cierto tamaño se alcanza para una frecuencia de excitación igual a la de resonancia, como era de esperar. Por debajo de esta frecuencia, el umbral tiende a un valor constante, el cual va aumentando a medida que disminuye el radio de la burbuja. Por el contrario, para altas frecuencias, la presión umbral aumenta rápidamente, con lo que el comportamiento no lineal en esta región sólo se conseguirá aplicando presiones muy elevadas. En particular, una burbuja de $3 \mu\text{m}$ presentará generalmente un comportamiento no lineal a bajas frecuencias para una presión acústica superior a 50 kPa. Sin embargo, el umbral mínimo de presión que se alcanza en la resonancia es de 8 kPa. Como se observa, estos umbrales incrementan a medida que se reduce el tamaño de la burbuja: para el caso de $1 \mu\text{m}$, el umbral de baja frecuencia será 80 kPa, y el umbral mínimo en la resonancia 10.8 kPa.

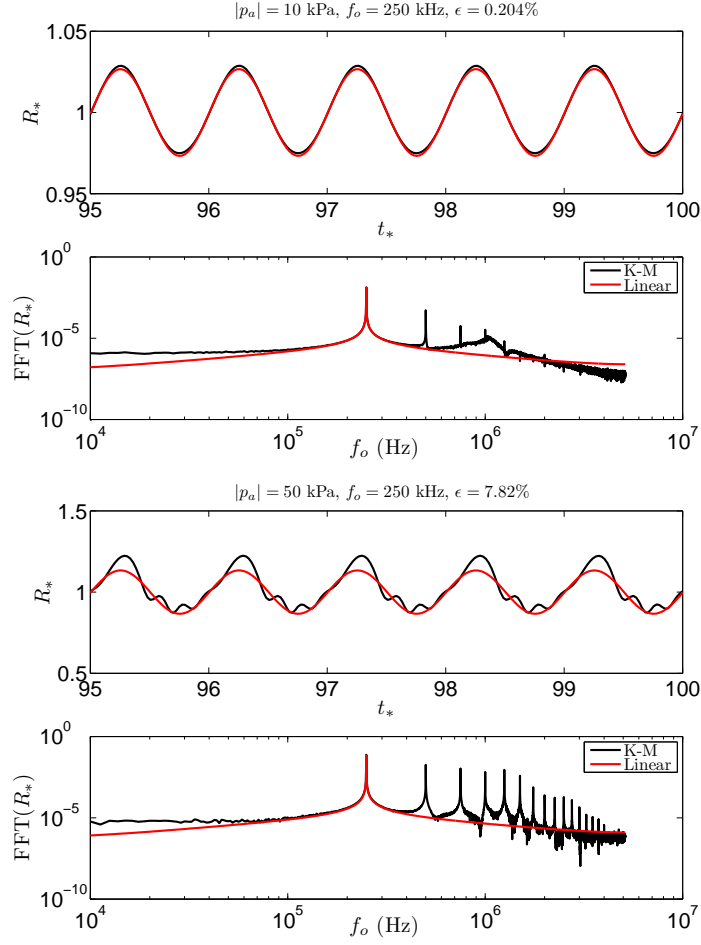


Figura 3.8: Espectro y evolución en régimen permanente de las oscilaciones de una burbuja de $R_o = 3 \mu\text{m}$ excitada por una onda sinusoidal de amplitud $|p_a| = P_a = 10 \text{ kPa}$ y 50 kPa , y una frecuencia de $f_o = 250 \text{ kHz}$.

La estimación de la presión umbral que da lugar al régimen de oscilaciones no lineales es necesaria para la correcta comparación de los resultados numéricos y teóricos, válidos en el régimen lineal, con futuros datos experimentales. Además, la localización de la presión acústica aplicada en los experimentos con respecto a la presión umbral, para una cierta frecuencia y tamaño de burbuja, proporcionará una estimación del error de las posibles divergencias que se presenten en la validación de dichos resultados.

3.3.4. Ecuación de Rayleigh-Plesset corregida

El coeficiente de amortiguamiento Γ , y por consiguiente las viscosidades ficticias antes definidas, resulta de un análisis lineal de la ecuación general de la dinámica de la burbuja. Si asumimos que la magnitud de las pérdidas asociadas a cada tipo de amortiguamiento no sufren grandes desviaciones entre el régimen de oscilaciones lineales y no lineales, podemos escribir una nueva ecuación de Rayleigh-Plesset corregida usando el concepto de viscosidad efectiva μ_E en vez de la viscosidad del líquido μ_L . Así pues, substituyendo la condición de salto (3.35) en la ecuación de Rayleigh-Plesset (3.32) se

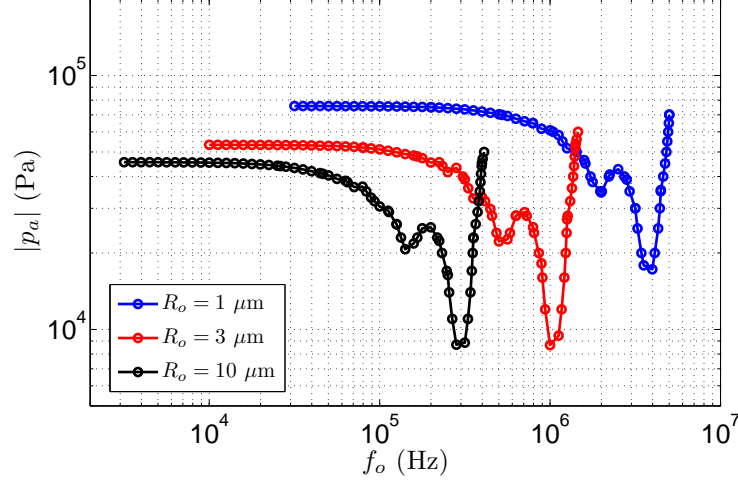


Figura 3.9: Umbral acústico para el comportamiento no lineal basado en errores relativos máximos de $\epsilon = 5\%$ con respecto de las oscilaciones lineales en régimen permanente.

obtiene finalmente

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{1}{\rho_\infty}(p_a + p_\infty) + \frac{1}{\rho_\infty} \left[p_{g0} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-3\kappa} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_E \frac{\dot{R}}{R} \right]. \quad (3.61)$$

Por tanto, además de las pérdidas debidas a la disipación viscosa, esta nueva ecuación tendrá también en cuenta las pérdidas térmicas y las pérdidas por reradiación de energía acústica, siendo tanto más precisa cuanto más lineales sean las oscilaciones. En efecto, la linealización en torno a R_o de la ecuación de Rayleigh-Plesset corregida da lugar a

$$\ddot{X} + 2d\dot{X} + \omega_n^2 X = -\frac{p_a}{\rho_\infty R_o^2}. \quad (3.62)$$

Esta ecuación se corresponde a la de un oscilador armónico, donde el factor de amortiguamiento incluirá directamente los tres mecanismos de disipación, es decir, $d = 2\mu_E/\rho_\infty R_o^2$.

Como consecuencia del análisis monocromático realizado para modelar el comportamiento del gas y obtener dichos coeficientes de amortiguamiento, en la ecuación (3.61) aparece explícitamente la frecuencia de excitación ω_o dentro de la definición del exponente politrópico $\kappa = \text{Re}\Phi/3$, y de la viscosidad μ_E . Como se puede comprobar, la frecuencia de resonancia y el amortiguamiento total de la burbuja dependen asimismo de la frecuencia de excitación. Por tanto, una burbuja solamente responderá como un oscilador armónico estándar cuando esté excitada por una señal acústica monocromática. Es por ello que la ecuación de Rayleigh-Plesset corregida será tanto menos precisa cuanto más contenido en frecuencias tenga la excitación p_a . Para paliar de alguna manera los posibles errores en estos casos, el exponente politrópico κ se evaluará para la frecuencia central de la excitación con el fin de asegurar una correcta rigidez durante las oscilaciones. Por el contrario, el término de disipación viscosa efectiva μ_E se evaluará para la frecuencia natural de la burbuja ω_n , ya que las oscilaciones resonantes son las más disipativas, y por tanto dominantes en la dinámica de la burbuja [Prosperetti (1988)].

3.4. Radiación acústica, dispersión y absorción

Con el fin de caracterizar las propiedades de las microburbujas como agentes de contraste ultrasónicos, es necesario analizar su comportamiento como fuente activa de emisión acústica. Para ello, construiremos la solución uniformemente válida para la entalpía total del líquido usando los resultados obtenidos en la Sec. 3.2 una vez aplicados los métodos de perturbación. De esta manera, escribimos $h_* = h_0 + H_0 + \epsilon(h_1 + H_1) + 2G_0'' + \epsilon f_0''$, siendo los dos últimos términos los correspondientes al acoplamiento entre la solución para el campo cercano y el lejano. Para obtener la energía acústica h_s radiada por la burbuja, de la expresión anterior para la entalpía total se deben seleccionar únicamente aquellos términos correspondientes a la propagación de energía debido al movimiento del contorno. Asumiendo en primera aproximación que $h_s \simeq p_s/\rho_\infty$, obtenemos, en variables con dimensiones,

$$p_s = \frac{\rho_\infty}{r} \left[R^2(\tau) \ddot{R}(\tau) + 2R(\tau) \dot{R}^2(\tau) \right] - \frac{\rho_\infty}{2} \frac{R^4 \dot{R}^2}{r^4}, \quad (3.63)$$

habiéndose introducido el tiempo de retardo $\tau = t - r/c_\infty$. En la Fig. 3.10 se muestra la presión radiada por una burbuja a una distancia $r = 20R_o$. Como vemos, esta presión radiada o dispersada (*scattered pressure* en inglés), posee dos términos bien diferenciados. El primer término se corresponde con la propagación de la onda esférica debida a las pulsaciones de la burbuja inmersa en un medio con cierta compresibilidad. Por el contrario, el segundo término representa la propagación instantánea de la onda cinética (*kinetic wave*) debida a las oscilaciones, cuyo decaimiento es mucho más acusado que el anterior, siendo prácticamente despreciable su contribución a la presión total [Leighton (1994)].

Teniendo esto cuenta, y dentro de régimen de oscilaciones lineales, la presión acústica radiada por la burbuja se puede expresar como $p_s = \rho_\infty R_o^3 \ddot{X}(\tau)/r$, para lo cual se ha asumido que $R = R_o(1+X)$ con $|X| \ll 1$. Suponiendo unas oscilaciones monocromáticas de frecuencia ω_o , y por tanto una radiación de la forma $p_s = \hat{p}_s \exp(-i\omega_o t)$, la amplitud de esta onda radiada a cualquier distancia r desde el centro de la burbuja se escribe finalmente

$$\hat{p}_s = \frac{R_o P_a}{(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (3.64)$$

siendo $k = \omega_o/c_\infty$ el número de onda. Observamos que este resultado se corresponde con el patrón de radiación de un monopolo acústico. Una vez hallada esta expresión, podemos definir la llamada función de dispersión de la burbuja f_s (*scattering function*) haciendo $\hat{p}_s = P_a f_s \exp(ikr)/r$, es decir

$$f_s = \frac{R_o}{(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma}. \quad (3.65)$$

Esta expresión nos da una idea de la intensidad de la onda dispersada por la burbuja en función de la frecuencia de excitación. Por lo tanto, en relación con la respuesta dinámica, esta intensidad alcanzará un máximo para la frecuencia de resonancia [Hilgenfeldt (1998)].

3.4.1. Sección eficaz de dispersión

La potencia acústica radiada que atraviesa un diferencial de área situado a una distancia r de la burbuja se expresa como $dP_s = I_s r^2 d\Omega$, siendo I_s la intensidad acústica

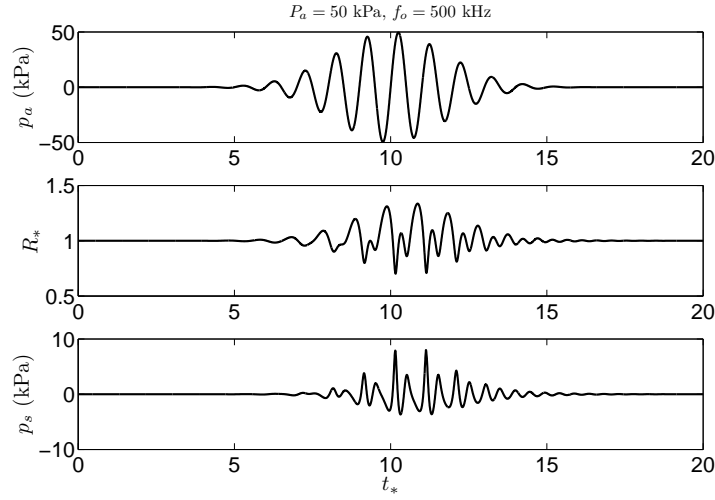


Figura 3.10: Radiación acústica emitida a una distancia $r = 20R_o$ de una burbuja con $R_o = 3 \mu\text{m}$. La burbuja oscila de forma no lineal bajo la acción de una excitación transitoria de amplitud máxima $P_a = 50 \text{ kPa}$, con una frecuencia central de $f_o = 500 \text{ kHz}$.

de la onda radiada en ese punto, y $d\Omega$ el elemento de ángulo sólido. Para distancias suficientemente grandes, la onda radiada se propaga localmente como una onda plana, siendo su intensidad $I_s \simeq |p_s|^2/2\rho_\infty c_\infty$. La relación entre la potencia acústica radiada por la burbuja y la intensidad de la excitación acústica $I_a = |p_a|^2/2\rho_\infty c_\infty$, viene dada por la sección diferencial de dispersión, o *differential scattering cross section*, $d\sigma_s = dP_s/I_a = |f_s|^2 d\Omega$, el cual indica la cantidad de energía dispersada a lo largo de una determinada dirección [Leighton (1994)]. La integral de esta expresión alrededor de la burbuja nos da finalmente la sección eficaz de dispersión, o *scattering cross section*, total

$$\sigma_s = \int_{\Omega} |f_s|^2 d\Omega = \frac{4\pi R_o^2}{\left[(\omega_n/\omega_o)^2 - 1\right]^2 + \Gamma^2}. \quad (3.66)$$

Este parámetro mide de cierta manera la eficiencia de una burbuja en cuanto a sus propiedades de dispersión acústica. Nótese que se podría llegar al mismo resultado planteando el cálculo de la potencia acústica disipada en un elemento de área del contorno de la burbuja debido a las pérdidas por reradiación de energía, es decir $dP_s = p_{ac} \dot{R} R_o^2 d\Omega$, donde $p_{ac} = 4\mu_{ac} \dot{R}/R$ sería el esfuerzo acústico ficticio en el contorno de la burbuja.

Como muestra la Fig. 3.11, para excitaciones de alta frecuencia, $\omega_o \gg \omega_n$, la burbuja se comporta como un radiador acústico pasivo (no ecogénico), ya que, en este límite, las oscilaciones pueden ser totalmente despreciadas con respecto a su tamaño. Efectivamente, comprobamos que $\sigma_s \simeq 4\pi R_o^2$, que no es más que la sección geométrica de una esfera rígida. En la resonancia, en cambio, la burbuja dispersa la energía acústica de forma activa: la dispersión acústica, para burbujas mayores de $1 \mu\text{m}$, alcanza un valor casi 100 veces más alto que el geométrico debido a las pulsaciones que realiza en este régimen. Es decir, una burbuja resonante es capaz de dispersar 100 veces más energía acústica que una partícula rígida del mismo tamaño. Sin embargo, para bajas frecuencias, $\omega_o \ll \omega_n$, este parámetro sufre un decaimiento proporcional a $\sigma_s \propto \omega_o^4$. A pesar de que en este límite las burbujas todavía se comportan como radiadores activos de energía acústica, la baja frecuencia de excitación hace que la intensidad de dicha energía sea muy débil.

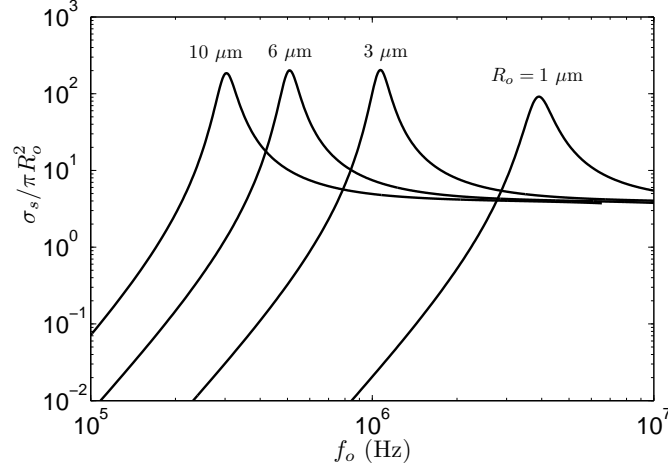


Figura 3.11: Sección eficaz de dispersión para burbujas de distintos tamaños en función de la frecuencia de excitación f_o .

Observando estos resultados, queda demostrada la conveniencia del uso de tales microburbujas como agentes de contraste ultrasónicos. Efectivamente, estas burbujas, dada sus propiedades ecogénicas, pueden generar una respuesta acústica equivalente a un objeto de tamaño casi 100 veces mayor. En definitiva, a pesar del pequeño tamaño de las microburbujas (lo cual por otro lado es óptimo para su correcta circulación en el torrente sanguíneo), se podrá conseguir un realce muy significativo del contraste en las imágenes ecográficas usando estas burbujas en vez de otro tipo de agentes no ecogénicos.

3.4.2. Sección eficaz de absorción y extinción

La potencia disipada en un elemento de área del contorno de la burbuja debido a la viscosidad y a la transferencia térmica, la cual es absorbida finalmente en forma calor por el medio, se puede expresar como $dP_a = (p_{vis} + p_{th})\dot{R}R_o^2 d\Omega$, donde $p_{vis} = 4\mu_L \dot{R}/R$ y $p_{th} = 4\mu_{th} \dot{R}/R$ son el esfuerzo viscoso y el esfuerzo térmico ficticio en el contorno de la burbuja respectivamente. Linealizando esta expresión, y asumiendo oscilaciones monocromáticas, se obtiene por tanto $dP_a = 4(\mu_L + \mu_{th})\omega_o^2 R_o^3 |\hat{X}|^2 d\Omega$. De forma análoga a σ_s , podemos definir la sección eficaz de absorción, o *absorption cross section*, como la relación entre la potencia absorbida y la intensidad de la excitación acústica, es decir $d\sigma_a = dP_a/I_a$. Integrando alrededor de la burbuja se obtiene finalmente

$$\sigma_a = (\Gamma/\Gamma_{ac} - 1)\sigma_s, \quad (3.67)$$

el cual ha sido expresado en función del valor de σ_s y de los coeficientes de amortiguamiento. Por último, se define la sección eficaz de extinción, o *extinction cross section*, como la suma de los dos parámetros anteriores, es decir

$$\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a = (\Gamma/\Gamma_{ac})\sigma_s. \quad (3.68)$$

Este parámetro indica por tanto la cantidad total de energía acústica cedida por la onda externa tras interactuar con la burbuja: la energía que adquiere la burbuja para oscilar finalmente se perderá debido a la dispersión acústica, y a la disipación viscosa y térmica. Como se verá en posteriores capítulos, el valor de σ_e está íntimamente relacionado con el coeficiente de atenuación acústica α de un medio formado por burbujas en suspensión.

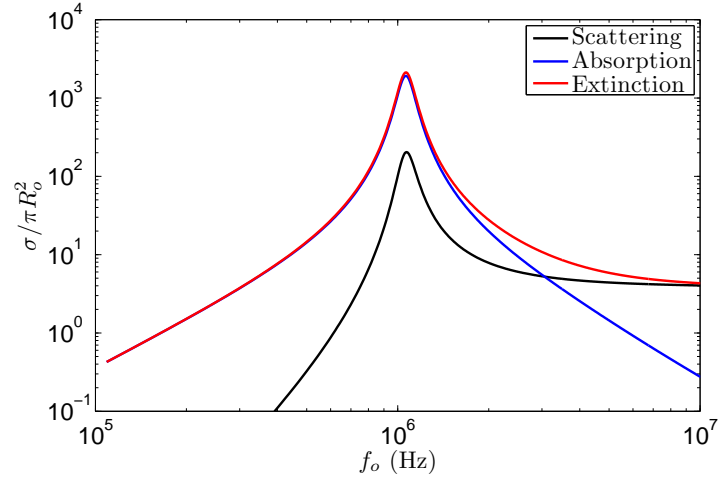


Figura 3.12: Sección eficaz de dispersión, absorción y extinción para una burbuja de 3 μm .

En la Fig. 3.12 se observa efectivamente que la energía disipada debido a la viscosidad y a la transferencia térmica se hace máxima para la frecuencia de resonancia de la burbuja. Esta energía disipada será siempre mayor que la energía acústica radiada excepto para excitaciones de alta frecuencia, donde el amortiguamiento debido a la reradiación acústica resulta dominante.

3.5. Estabilidad y efectos de difusión máscA

A continuación veremos el impacto que tienen los mecanismos de difusión máscA a través del contorno de una burbuja, y cómo estos fenómenos modifican su estabilidad y, eventualmente, su comportamiento dinámico, debido a la variación temporal del radio de equilibrio. Así pues, una burbuja inmersa en un medio líquido, en ausencia de excitación acústica, tiende a disolverse gradualmente debido tanto al exceso de presión interna provocado por los efectos de tensión superficial, como a la diferencia de concentración del gas entre el interior y el exterior de la burbuja [Epstein (1950)]. Este fenómeno se conoce como difusión pasiva. Sin embargo, cuando existe una excitación acústica externa que provoque las oscilaciones de la burbuja, puede darse el fenómeno contrario: el gas disuelto en el líquido es bombeado hacia el interior de la burbuja, experimentando un incremento de su radio de equilibrio a medida que oscila [Hsieh (1961), Crum (1984)]. Este efecto, conocido como difusión rectificada, se debe básicamente al desequilibrio en el flujo de la masa gaseosa entre los instantes donde el radio de la burbuja, y por tanto su superficie, alcanza valores máximos y mínimos respectivamente. De esta manera, durante un periodo de oscilación, se crea un flujo neto de gas hacia el interior [Eller (1965)]. Tanto la difusión pasiva como la difusión rectificada tienen, por tanto, consecuencias en la estabilidad de las microburbujas en cuanto a su tamaño.

Una vez analizados los efectos de difusión en la estabilidad de la burbuja, podremos justificar el uso de gases de baja difusividad máscA (perfluorocarbonos, hexafluoruro de azufre,...) en las microburbujas de contraste, y la necesidad de incorporar una barrera material en su contorno. Este recubrimiento tendrá como fin disminuir la presión interna, y dificultar la filtración gaseosa, por lo que mejorará la estabilidad y supervivencia de

los agentes de contraste durante el tiempo en que transcurra la exploración o terapia ultrasónica [Stride (2003), Ferrara (2007)].

3.5.1. Difusión pasiva

Con el fin de analizar la evolución en el tiempo del radio de equilibrio de la burbuja, se debe plantear en primer lugar la ley Fick generalizada, que es la ecuación diferencial que modela la difusión de la masa gaseosa disuelta en un medio líquido en movimiento, es decir,

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = D_m \nabla^2 C, \quad (3.69)$$

siendo C la concentración del gas y D_m su difusividad másica. Para calcular la transferencia de masa a través de la burbuja, debemos imponer unas condiciones para la concentración del gas en su contorno, C_w , la cual viene dada por la ley de Henry, $C_w = p_g/H_D$, siendo H_D la constante de Henry de la disolución. Como vemos, esta ecuación, como sus condiciones de contorno, están acopladas con la ecuación del movimiento de la fase líquida, y en general, con la dinámica de las oscilaciones de la burbuja, con lo cual su resolución exacta es inabordable.

En el caso en que la burbuja no esté sometida a ninguna excitación acústica, podemos simplificar el problema asumiendo que el término convectivo en la ley de Fick es despreciable dada la ausencia de oscilaciones. Para esta situación, donde la evolución del radio de la burbuja como la variación de C_w son lo suficientemente lentos [Epstein (1950), Neppiras (1980)], se tiene

$$\dot{R}_o = \frac{C_o D_m}{\rho_g} \left(\frac{C_\infty}{C_o} - 1 - \frac{2\sigma}{p_\infty R_o} \right) \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{\sqrt{\pi D_m t}} \right), \quad (3.70)$$

siendo C_∞ la concentración de equilibrio, y C_o la concentración de saturación, la cual se relaciona con la concentración en el contorno por $C_w/C_o = 1 + 2\sigma/p_\infty R_o$. Se observa que, incluso cuando $C_\infty = C_o$, la burbuja terminará por disolverse debido a la presión de Laplace. Como ejemplo, en la Fig. 3.13 se observa que una burbuja de $10 \mu\text{m}$ tarda unas 6 veces más en disolverse en agua saturada de aire, que en agua con $C_\infty = 0$. Por otro lado, comprobamos efectivamente que para este tamaño inicial, es posible la disolución completa en agua supersaturada. Como era de esperar, a medida que el tamaño de equilibrio inicial es más pequeño, el tiempo de disolución será menor, sin embargo, en condiciones de supersaturación, estas burbujas presentan una mayor estabilidad frente a su crecimiento por difusión pasiva. Obviamente, cuanto más pequeña sea la difusividad másica del gas, mayor tiempo característico tendrá el proceso de disolución, por lo que la burbuja será más estable.

3.5.2. Difusión rectificada

Durante la disolución pasiva, el movimiento del contorno de la burbuja se asume, en primera aproximación, cuasiestático, por lo que los términos convectivos que aparecen en la ley de Fick generalizada (3.69) pueden ser ignorados. Sin embargo, cuando una excitación acústica externa hace que la burbuja comience a oscilar, estos términos no podrán despreciarse. Esto hace, en definitiva, que el problema dinámico esté acoplado con el problema de transferencia de masa. Con el fin de encontrar una solución aproximada, Hsieh y Plesset [Hsieh (1961)] modelaron el comportamiento de pequeñas oscilaciones

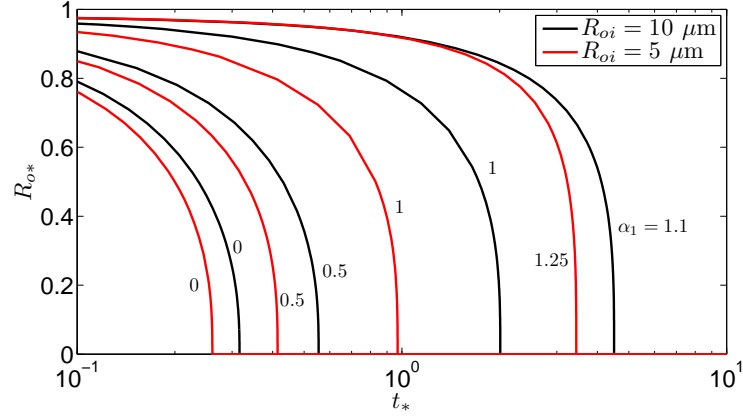


Figura 3.13: Evolución, debida a la difusión pasiva, del radio de equilibrio $R_{o*} = R_o/R_{oi}$ de una burbuja inmersa en agua con distintas concentraciones de aire $\alpha_1 = C_\infty/C_o$. El tiempo se ha adimensionalizado por $t_* = t/t_o$, con $t_o = R_{oi}^2 \rho_g / C_o D_m$ el tiempo característico. Tanto $\alpha_1 = 1.1$ como $\alpha_1 = 1.25$ son los valores de supersaturación más cercanos al umbral del crecimiento por difusión pasiva para cada tamaño.

de una burbuja inmersa en un medio líquido saturado de gas a la misma presión que el interior de la burbuja. Esta aproximación está planteada para frecuencias de excitación lo suficientemente pequeñas, donde se cumple que las oscilaciones son isotérmicas y no resonantes, y para longitudes características de difusión $\delta_D \sim (D_m/\omega_o)^{1/2}$ menores que el radio de la burbuja R_o , tal que la difusión pasiva sea despreciable. Teniendo en cuenta los efectos de la tensión superficial [Neppiras (1980)], pero ignorando los efectos viscosos y térmicos, se obtiene

$$\dot{R}_o = \frac{2}{3} \frac{C_o D_m}{\rho_g R_o} \left(\frac{P_a}{p_\infty} \right)^2 \left(1 + \frac{2\sigma}{p_\infty R_o} \right), \quad (3.71)$$

donde P_a es la amplitud de la excitación acústica. Como podemos comprobar, bajo las condiciones antes comentadas, la burbuja excitada por la acción de un campo acústico experimenta siempre un crecimiento de su tamaño de equilibrio dado que $\dot{R}_o > 0$, el cual es independiente de la frecuencia de excitación. Para que este resultado pueda ser aplicado a burbujas de cualquier tamaño, incluso resonantes, la expresión debe ser corregida con el factor $f(\omega_o) = [(1 - \omega_o^2/\omega_n^2)^2 + \omega_o^2 \Gamma^2/\omega_n^2]^{-1}$, estando el coeficiente de amortiguamiento Γ evaluado para la frecuencia de resonancia [Safar (1968), Kapustina (1970)].

El resultado anterior es válido para las oscilaciones de una burbuja inmersa en un líquido saturado de gas. Sin embargo, cuando la concentración de gas es diferente a la de saturación, la disolución de la burbuja debido a la difusión pasiva compite con el crecimiento provocado por la difusión rectificada. Para esta situación, se puede establecer un umbral de presiones acústicas P_a que separe ambas tendencias. Imponiendo que el flujo neto de masa gaseosa a través del contorno de la burbuja sea nulo cuando entran en juego ambos fenómenos, se llega a [Neppiras (1980)]

$$\frac{P_a^2}{p_\infty^2} = \frac{3}{2f(\omega_o)} \left(\frac{1 + 2\sigma/p_\infty R_o - C_\infty/C_o}{1 + 2\sigma/p_\infty R_o} \right) \quad (3.72)$$

Según la expresión anterior, a medida que se incrementa el tamaño de equilibrio de la burbuja, el umbral tiende a disminuir hasta alcanzar el radio de resonancia para la

frecuencia de excitación dada. Una vez superado este punto, el umbral crece rápidamente a medida que el tamaño de la burbuja aumenta.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha llevado a cabo una revisión de la formulación general de la dinámica de burbujas con el fin de caracterizar su comportamiento acústico frente a excitaciones externas. Usando métodos de perturbación sobre la fase líquida, se han obtenido las ecuaciones que gobiernan la dinámica de las oscilaciones radiales de las burbujas con errores de hasta $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, siendo ϵ equivalente al número de Mach asociado a la velocidad del contorno. Estas ecuaciones no lineales permiten el análisis de los fenómenos asociados a la cavitación y a la sonoluminiscencia, en los cuales se producen colapsos muy rápidos por parte de las burbujas. Al mismo tiempo, se ha estudiado el comportamiento termodinámico linealizado de la fase gaseosa, obteniendo una corrección para la ley de evolución politrópica la cual tiene en cuenta las pérdidas por transferencia de calor. Finalmente, la linealización de la ecuación general de la dinámica radial de las oscilaciones nos permite identificar tanto la frecuencia natural, como las distintas componentes del amortiguamiento total: viscoso, térmico y acústico. Por tanto, a través de la definición de una viscosidad lineal efectiva, hemos podido plantear una ecuación de Rayleigh-Plesset corregida y válida para líquidos con cierta compresibilidad.

Con el fin de cuantificar la desviación del comportamiento linealizado, se ha obtenido un umbral que predice a partir de qué presiones acústicas una burbuja oscila de forma no lineal bajo una excitación a una determinada frecuencia. Este resultado es útil a la hora de seleccionar el voltaje a aplicar sobre el transductor piezoeléctrico en los distintos montajes experimentales propuestos en el siguiente capítulo, los cuales pretenden caracterizar las propiedades acústicas lineales de las microburbujas. Por otro lado, la formulación de la dinámica lineal nos permite caracterizar el espectro de las oscilaciones, las cuales se relacionan con las propiedades de dispersión acústica de las burbujas. Así pues, los resultados revelan que estas oscilan de forma resonante para determinadas frecuencias, lo que implica una elevada dispersión de energía acústica. Es esta propiedad ecogénica la que convierte a las microburbujas en un excepcional agente de contraste ultrasónico para su uso en aplicaciones clínicas.

Bibliografía

- [Rayleigh (1917)] Lord Rayleigh, “On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity.” *Phil. Mag.*, vol. 34(200), pp. 94 – 98 (1917)
- [Blake (1987)] J. Blake & D. Gibson, “Cavitation bubbles near boundaries.” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 19, pp. 99 – 123 (1987)
- [Plesset (1949)] M. Plesset, “The dynamics of cavitation bubbles.” *J. Appl. Mech.*, vol. 16, pp. 277 – 282 (1949)
- [Flynn (1975)] H. Flynn, “Cavitation dynamics I: a mathematical formulation.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, pp. 1379 – 1396 (1975)
- [Lauterborn (1976)] W. Lauterborn, “Numerical investigations of nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 59(2), pp. 283 – 293 (1976)

- [Neppiras (1980)] E. Neppiras, “Acoustic cavitation.” *Phys. Rep.*, vol. 61, pp. 159 – 251 (1980)
- [Keller (1980)] J. Keller & M. Miksis, “Bubble oscillations of large amplitude.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 68, pp. 628 – 633 (1980)
- [Trilling (1952)] L. Trilling, “The collapse and rebound of a gas bubble.” *J. Appl. Phys.*, vol. 23, pp. 24 – 17 (1952)
- [Feng (1997)] Z. Feng & L. Leal, “Nonlinear bubble dynamics.” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 29, pp. 201 – 243 (1997)
- [Devin (1959)] C. Devin, “Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, pp. 1654 – 1667 (1959)
- [Eller (1970)] A. Eller, “Damping constants of pulsating bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 47, pp. 1469 – 1470 (1970)
- [Chapman (1972)] R. Chapman & M. Plesset, “Thermal effects in the free oscillations of gas bubbles.” *J. Basic. Eng.*, vol. 94, pp. 142 – 145 (1972)
- [Prosperetti (1974)] A. Prosperetti, “Nonlinear oscillations of gas bubbles in liquids: steady-state solutions.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 56(3), pp. 878 – 885 (1974)
- [Prosperetti (1977)] A. Prosperetti, “Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 61, pp. 17 – 27 (1977)
- [Crum (1983)] L. Crum, “The polytropic exponent of gas contained within air bubbles pulsating in a liquid.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 73, pp. 116 – 120 (1983)
- [Gaitan (1992)] D. Gaitan, L. Crum, C. Church & R. Roy, “Sonoluminescence and bubble dynamics for a single, stable, cavitation bubble.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 91(6), pp. 3166 – 3183 (1992)
- [Putterman (1994)] S. Putterman, “Sonoluminescence: sound into light.” *Sc. Am.*, vol. 272(2), pp. 46 – 51 (1994)
- [Lohse (2001)] D. Lohse, B. Schmitz & M. Versluis, “Snapping shrimp make flashing bubbles.” *Nature*, vol. 413, pp. 477 – 478 (2001)
- [Brenner (2002)] M. Brenner, S. Hilgenfeldt & D. Lohse, “Single-bubble sonoluminescence.” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, pp. 425 – 484 (2002)
- [Minnaert (1933)] M. Minnaert, “On musical air-bubbles and the sound of running water.” *Philosophical Magazine*, vol. 16(104), pp. 235 – 248 (1933)
- [Gremiak (1968)] R. Gremiak & P.M. Shah, “Echocardiography of the aortic root.” *Invest. Radiol.*, vol. 3, pp. 356 – 388 (1968)
- [Leighton (1994)] T.G. Leighton, *The acoustic bubble*, Academic Press, London, 1994
- [Hilgenfeldt (1998)] S. Hilgenfeldt, D. Lohse & M. Zomack, “Response of bubbles to diagnostic ultrasound: a unifying theoretical approach.” *Eur. Phys. J. B*, vol. 4, pp. 247 – 255 (1998)

- [de Jong (2002)] N. de Jong, A. Bouakaz & P. Frinking, “Basic acoustic properties of microbubbles.” *Echocardiography*, vol. 19(3), pp. 229 – 240 (2002)
- [Stride (2003)] E. Stride, & N. Saffari, “Microbubble ultrasound contrast agents: a review.” *Proc. Instn Mech. Engrs*, vol. 217, part H: J. Engineering in Medicine, pp. 429 – 447 (2003)
- [Prosperetti (1986)] A. Prosperetti & A. Lezzi, “Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First-order theory.” *J. Fluid Mech.*, vol. 168, pp. 457 – 478 (1986)
- [Plesset (1960)] M. Plesset & D. Hsieh, “Theory of gas bubble dynamics in oscillating pressure fields.” *Phys. Fluids* vol. 3, pp. 882 – 892 (1960)
- [Prosperetti (1988)] A. Prosperetti, L. Crum & K. Commander, “Nonlinear bubble dynamics.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83(2), pp. 502 – 514 (1988)
- [Prosperetti (1991)] A. Prosperetti, “The thermal behaviour of oscillating gas bubbles.” *J. Fluid Mech.*, vol. 222, pp. 587 – 616 (1991)
- [Brennen (1995)] C. Brennen, *Cavitation and bubble dynamics*, Oxford University Press, New York, 1995
- [Epstein (1950)] P. Epstein & M. Plesset, “On the stability of gas bubbles in liquid-gas solutions.” *J. Chem. Phys.*, vol. 18, pp. 1505 – 1509 (1950)
- [Hsieh (1961)] D. Hsieh & M. Plesset, “Theory of rectified diffusion of mass into gas bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 33, pp. 206 – 215 (1961)
- [Crum (1984)] L. Crum, “Rectified diffusion.” *Ultrasonics*, vol. 22, pp. 215 – 223 (1984)
- [Ferrara (2007)] K. Ferrara, R. Pollard & M. Borden, “Ultrasound microbubble contrast agents: fundamentals and application to gene and drug delivery.” *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 9, pp. 415 – 447 (2007)
- [Safar (1968)] M. Safar, “Comments on paper concerning rectified diffusion of cavitation bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 43, pp. 1188 – 1189 (1968)
- [Kapustina (1970)] O. Kapustina, “Gas bubble in a small-amplitude sound field.” *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 15, pp. 427 – 438 (1970)
- [Eller (1965)] A. Eller & H. Flynn, “Rectified diffusion through nonlinear pulsations of cavitation bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 37, pp. 493 – 503 (1965)

Capítulo 4

Generación y caracterización acústica de agentes de contraste monodispersos

El espectro de atenuación acústica para diferentes suspensiones de microburbujas recubiertas por fosfolípidos, ha sido medido con el fin de caracterizar el comportamiento acústico lineal de este tipo de agentes de contraste ultrasónicos. Para tal propósito, estas microburbujas han sido generadas con una distribución de tamaño muy estrecha haciendo uso de técnicas microfluidas operadas en dos regímenes diferentes: *flow-focusing* y *co-flow*. Mostramos que los agentes de contraste monodispersos optimizan la respuesta ecogénica estrechando el espectro de atenuación, el cual presenta un pico máximo para un valor de frecuencia correspondiente a la frecuencia de resonancia media de las burbujas. El bajo índice de polidispersión de nuestras muestras hace que la estimación de las propiedades viscoelásticas que definen al recubrimiento lipídico sea más precisa, ya que estas pueden variar según el radio de equilibrio de las burbujas. Los resultados, por tanto, muestran la gran ventaja de tratar con poblaciones monodispersas de burbujas para la caracterización acústica de los agentes de contraste ultrasónicos.¹

4.1. Introducción

Los agentes de contraste ultrasónicos son pequeñas microburbujas llenas de gas, con tamaños que van desde $1\ \mu\text{m}$ hasta $12\ \mu\text{m}$, las cuales son inyectadas en el torrente sanguíneo con el fin de incrementar la ecogenicidad de la sangre con respecto a los tejidos circundantes. A parte de las aplicaciones médicas para la mejora del contraste en imágenes ecográficas [Gremiak (1968), Stride (2003), Calliada (1998)], estos agentes tienen también un gran potencial para ser usados como portadores de fármacos y genes en diferentes terapias para el tratamiento de enfermedades de forma localizada [Dijkmans (2004), Ferrara (2007), Unger (2004)]. Como resultado de su compresibilidad, las microburbujas realizan oscilaciones volumétricas que dan lugar a un fuerte eco resonante cuando son excitadas por una onda ultrasónica a una de-

¹Basado en el artículo original: Miguel A. Parrales, Juan M. Fernández, Miguel Pérez-Saborid, Jonathan A. Kopechek, Tyrone M. Porter, “Acoustic characterization of monodisperse lipid-coated microbubbles: relationship between size and shell viscoelastic properties” submitted at *J. Acoust. Soc. Am.*, (2013)

terminada frecuencia. En consecuencia, estas dispersan mucha más energía acústica que la que dispersarían partículas rígidas del mismo tamaño, o incluso más grandes [Hoff (1996), de Jong (2002), Hilgenfeldt (1998)]. Las microburbujas de contraste para aplicaciones médicas están comunmente recubiertas por una capa de fosfolípidos para prevenir la rápida disolución del núcleo gaseoso, ya que reduce la tensión de Laplace dentro de la burbuja [Doinikov (2011)]. En consecuencia, las propiedades viscoelásticas de tales recubrimientos hacen que las microburbujas aumenten sus frecuencia de resonancia. Por otro lado, el eco ultrasónico de los agentes de contraste tendrá una componente extra de atenuación debido a la disipación viscosa del fosfolípido durante las oscilaciones de las microburbujas [Marmottant (2005), Doinikov (2011)].

Algunos estudios previos han venido caracterizado el comportamiento acústico lineal de suspensiones de microburbujas de contraste midiendo el espectro de atenuación acústica [de Jong (1992), Marsh (1997)]. Si la suspensión tiene una distribución de tamaños lo suficiente estrecha, las curvas de atenuación poseerán un pico máximo para un valor de frecuencia correspondiente a la frecuencia de resonancia media de las burbujas. El nivel de atenuación para cada frecuencia será proporcional a la concentración de microburbujas de la muestra, siendo esto solamente válido para aquellas bajas concentraciones donde la dispersión múltiple entre burbujas puede ser ignorada [Marsh (1997)]. En este rango, podemos hacer uso de la teoría de dispersión simple para estimar experimentalmente las propiedades viscoelásticas del material encapsulante, de acuerdo con el modelo linealizado de Marmottant et al. [Marmottant (2005)]. Como ha sido reportado, el comportamiento viscoelástico de los recubrimientos lipídicos no es lineal, y en consecuencia, los parámetros que lo definen pueden variar según el tamaño de equilibrio de la burbuja [Doinikov (2009)]. Dado que en el presente estudio tratamos con muestras monodispersas, nuestro método experimental asegura una estimación precisa de la propiedades del encapsulamiento, eliminando la incertidumbre que aparecería si se usase muestras polidispersas.

En este estudio, mostramos que las suspensiones de agentes de contraste monodispersos optimiza la respuesta ecogénica estrechando el espectro de atenuación acústica. Encontramos que el efecto de la polidispersión en los tamaños de las burbujas juega un papel muy importante en el comportamiento espectral de la atenuación. De hecho, altos índices de polidispersión hacen que el pico máximo de atenuación se aplane y se ensanche, de manera que la frecuencia media de resonancia de la muestra, y por tanto las propiedades viscoelásticas del recubrimiento, sean difíciles de identificar con precisión [Gong (2010)].

4.2. Dinámica de burbujas encapsuladas

Una microburbuja esférica aislada, con un radio de equilibrio R_o en reposo, permanece inmersa en un medio líquido infinito, con una densidad ρ_∞ y viscosidad μ_L , bajo una presión hidrostática p_∞ . Cualquier perturbación acústica p_a con una longitud de onda característica $\lambda \gg R_o$, hará que la burbuja realice oscilaciones radiales, manteniendo su geometría esférica. Aplicando las ecuaciones del movimiento incompresible de un fluido sobre la microburbuja, y realizando un balance entre las fuerzas de inercia en su contorno y la diferencia de presión en el líquido que la rodea, se llega a la conocida ecuación de Rayleigh-Plesset [Prosperetti (1986), Hilgenfeldt (1998)], la cual gobierna

las oscilaciones radiales de la microburbuja

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_\infty}(p_L - p_a - p_\infty), \quad (4.1)$$

donde p_L representa a la presión del líquido justo en el contorno externo de la burbuja. Este término podrá ser relacionado con la presión del gas en el interior p_g estableciendo un balance de esfuerzos normales en el contorno.

Como se ha analizado, las burbujas son inestables en cuanto a su tamaño de equilibrio debido a los efectos de difusión másica. Para evitar esto, se propone entonces incorporar un recubrimiento que, junto a la baja difusividad del gas D_m , ralentice lo máximo posible tanto los procesos de difusión pasiva, como el crecimiento por difusión rectificada. En el uso de microburbujas como agentes de contraste, el efecto más importante a contrarestar es la disolución pasiva del gas en el torrente sanguíneo. De esta manera, el recubrimiento hace que la rapidez con la que varía el radio de equilibrio alcance un valor estacionario tal que [Ferrara (2007), Borden (2002)]

$$\dot{R}_o = \frac{L}{R_o/D_m + \Pi_s} \left(\frac{C_\infty/C_o - 1 - 2\sigma_o/p_\infty R_o}{1 + 3\sigma_o/4p_\infty R_o} \right), \quad (4.2)$$

donde L es el coeficiente de Ostwald del gas, σ_o es la tensión superficial total del material encapsulante, y Π_s es la resistencia del recubrimiento a la permeabilidad del gas [Borden (2002)]. Esta expresión revela que el tiempo de disolución de una burbuja de perfluorobutano (PFB) encapsulada por una monocapa de fosfolípidos es 6 órdenes de magnitud mayor que el de una burbuja de aire sin recubrir [Ferrara (2007)]. El tiempo característico de desaparición de una burbuja de aire de $5 \mu\text{m}$, en agua saturada, es de 0.1 s aproximadamente, lo que hace inviable su uso clínico como agente de contraste. Sin embargo, una burbuja de PFB del mismo tamaño y recubierta, puede mantener prácticamente su radio inicial hasta pasadas 3 horas en agua degasificada, lapso de tiempo suficiente para realizar la inspección o tratamiento médico por ultrasonidos.

4.2.1. Modelo viscoelástico Kelvin-Voigt

Los efectos del recubrimiento en la dinámica de la microburbuja pueden ser modelados de acuerdo con la formulación pionera propuesta por Roy et al. [Roy (1990)] y Church [Church (1995)], en la cual se deriva una ecuación tipo Rayleigh-Plesset teniendo en cuenta la presencia de un material incompresible, de espesor finito, en el contorno de la burbuja,

$$\begin{aligned} R_{in}\ddot{R}_{in} \left[1 + \left(\frac{\rho_\infty - \rho_s}{\rho_s} \right) \frac{R_{in}}{R_{out}} \right] + \\ + \dot{R}_{in}^2 \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{\rho_\infty - \rho_s}{\rho_s} \right) \left(\frac{4R_{out}^3 - R_{in}^3}{2R_{out}^3} \right) \frac{R_{in}}{R_{out}} \right] = \frac{1}{\rho_s}(p_L - p_a - p_\infty), \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde ρ_s es la densidad del material encapsulante, con R_{in} y R_{out} el radio interior y exterior a la membrana respectivamente. En este caso, el balance de esfuerzos normales en el contorno se expresa como

$$p_L = p_g - \frac{2\sigma_{in}}{R_{in}} - \frac{2\sigma_{out}}{R_{out}} - 4\mu_E \frac{R_{in}^2 \dot{R}_{in}}{R_{out}^3} + 3 \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{\tau_{Srr}}{r} dr, \quad (4.4)$$

siendo $p_g = p_{g0}(R_{in}/R_{0in})^{-3\kappa}$ la presión del gas en el interior, σ_{in} y σ_{out} la tensión superficial de la interfase material/gas y material/líquido respectivamente, μ_E la viscosidad efectiva del líquido, y τ_{Srr} la componente radial de la parte desviadora del tensor de esfuerzos del material encapsulante. Nótese que la condición de incompresibilidad nos liga la evolución los radios interior y exterior a través de $R_{out}^3 - R_{in}^3 = R_{0out}^3 - R_{0in}^3$. La anterior ecuación es general y permite trabajar con cualquier material simplemente introduciendo sus propiedades reológicas en el tensor de esfuerzos.

En el caso de que el material del recubrimiento se comporte como un sólido viscoelástico tipo Kelvin-Voigt, tendremos $\tau_{Srr} = 2\zeta_s \partial d_s / \partial r + 2\mu_s \partial u_s / \partial r$, donde ζ_s y μ_s representan la elasticidad y la viscosidad del recubrimiento respectivamente, con $d_s(r, t)$ y $u_s(r, t)$ su campo de desplazamientos y velocidades radiales [Doinikov (2011)]. Con el fin de modelar de forma aproximada los recubrimientos de fosfolípidos, muy comunes en la elaboración de agentes de contraste comerciales, podremos considerar que el espesor ϵ_s de la membrana (entre 1 nm y 4 nm) tiende a un valor nulo. De esta manera, la ecuación para la dinámica de la burbuja encapsulada se escribe

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{1}{\rho_\infty}(p_a + p_\infty) + \frac{1}{\rho_\infty} \left[p_{g0} \left(\frac{R}{R_o} \right)^{-3\kappa} - \frac{2\sigma(R)}{R} - 4\mu_E \frac{\dot{R}}{R} - 4\kappa_s \frac{\dot{R}}{R^2} \right], \quad (4.5)$$

la cual coincide con lo propuesto por Marmottant et al. [Marmottant (2005)]. En este modelo, se trabaja con una tensión superficial efectiva dada por $\sigma(R) \simeq 2\chi(R/R_o - 1)$ en el régimen elástico lineal, habiéndose definido el módulo elástico $\chi = 3\epsilon_s \zeta_s \gg \sigma_o$, donde $\sigma_o = \sigma_{in} + \sigma_{out}$. Por otro lado la viscosidad superficial se define como $\kappa_s = 3\epsilon_s \mu_s$. Estas dos propiedades viscoelásticas son desconocidas a priori, por lo que deben estimarse de manera experimental [Marmottant (2005), Doinikov (2011)].

4.2.2. Comportamiento acústico lineal

Dado que estamos interesados en el análisis lineal de las propiedades acústicas de las microburbujas de contraste, la ecuación de Rayleigh-Plesset debe ser linealizada asumiendo unas oscilaciones de pequeña amplitud tales que $R \simeq R_o(1+X)$, con $|X| \ll 1$. Por lo tanto, la ecuación para la dinámica lineal de las oscilaciones radiales resulta [Prosperetti (1977), Prosperetti (1988)]

$$\ddot{X} + 2d\dot{X} + \omega_n^2 X = -\frac{p_a}{\rho_\infty R_o^2}, \quad (4.6)$$

donde $d = 2\mu_E/\rho_\infty R_o^2 + 2\kappa_s/\rho_\infty R_o^3$ es el factor de amortiguamiento y ω_n es la frecuencia natural de la burbuja, definida por

$$\omega_n^2 = \frac{3\kappa p_\infty}{\rho_\infty R_o^2} + \frac{4\chi}{\rho_\infty R_o^3}. \quad (4.7)$$

Esta ecuación diferencial muestra que la microburbuja se comporta como un oscilador armónico amortiguado, cuyas oscilaciones alcanzan su máxima amplitud cuando es excitada a ω_n . Si comparamos con una microburbuja sin recubrir, observamos que el efecto del encapsulamiento añade un mecanismo extra de disipación viscosa. Además, como se comprueba, la presencia de este recubrimiento implica también una mayor frecuencia natural debido a la rigidez aportada por la membrana lipídica [Doinikov (2011)].

El movimiento pulsatorio del contorno hace que la burbuja se comporte como fuente monopolar de radiación acústica: la energía acústica externa será dispersada debido a los mecanismos de reradiación [Hilgenfeldt (1998)]. La intensidad de esta fuente puede ser expresada en función del movimiento del contorno. Por tanto, la presión acústica radiada a una distancia r del centro de la burbuja, inducida por las oscilaciones radiales en el régimen lineal, resulta $p_s = \rho_\infty R_o^3 \ddot{X}(\tau)/r$, donde $\tau = t - r/c_\infty$ es el tiempo retardado. Asumiendo excitaciones monocromáticas $p_a = P_a \exp(-i\omega_o t)$, y por tanto unas oscilaciones $X = \hat{X} \exp(-i\omega_o t)$, podemos expresar la amplitud de estas oscilaciones como $\hat{X} = -P_a [(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma]^{-1} / \rho_\infty \omega_o^2 R_o^2$, siendo $\Gamma = 2d/\omega_o$ el coeficiente adimensional de amortiguamiento. Así pues, considerando que $p_s = \hat{p}_s \exp(-i\omega_o t)$, escribimos finalmente

$$\hat{p}_s = \frac{P_a R_o}{(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma} \frac{e^{ikr}}{r} = P_a f_s \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4.8)$$

donde $k = \omega_o/c_\infty$ es el número de onda, y $f_s = R_o [(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma]^{-1}$ es la función de dispersión omnidireccional. Por lo tanto, en relación con la respuesta oscilatoria, el sonido dispersado por la microburbuja alcanzará su máximo para la frecuencia natural [de Jong (1992), Hilgenfeldt (1998)].

La relación entre la potencia acústica total dispersada y la intensidad de la excitación viene dada por la sección eficaz de dispersión, la cual puede ser escrita como $\sigma_s = 4\pi |f_s|^2$. Este parámetro, por tanto, mide la eficiencia de la microburbuja como dispersor del sonido [Hilgenfeldt (1998)]. Por otro lado, la sección eficaz de absorción σ_a estará relacionada con la eficiencia en disipar la energía acústica [de Jong (1992)], y viene dada por $\sigma_a = (\Gamma/\Gamma_{ac} - 1)\sigma_s$, donde Γ_{ac} es el coeficiente de amortiguamiento acústico. Finalmente, la potencia acústica total eliminada por la burbuja puede ser calculada mediante la sección eficaz de extinción, $\sigma_e = \sigma_s + \sigma_a$, la cual se escribe

$$\sigma_e = 4\pi \Gamma |f_s|^2 / \Gamma_{ac} = \frac{4\pi R_o^2 \Gamma / \Gamma_{ac}}{\left[(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 \right]^2 + \Gamma^2}. \quad (4.9)$$

Podemos comprobar que este parámetro depende de las propiedades viscoelásticas del fosfolípido a través de la frecuencia natural y del coeficiente de amortiguamiento, por lo que $\sigma_e = \sigma_e(R_o, \omega_o, \chi, \kappa_s)$. La sección eficaz de extinción está estrechamente ligado a las propiedades de atenuación acústica de una suspensión de burbujas como se mostrará a continuación [de Jong (1992)].

Asumamos ahora una suspensión diluida de microburbujas a una concentración relativamente baja y homogénea δ (burbujas por metro cúbico), de manera que los fenómenos de dispersión múltiple puedan ser ignorados. Por otro lado, la distribución de tamaños de la población de burbujas estará dado por la función de densidad de probabilidad $f(R_o)$. El decaimiento de la intensidad acústica I de una onda que recorre una distancia dz a través de la suspensión viene dada por $dI(z) = -\alpha I(z) dz$, donde α es el coeficiente de atenuación [de Jong (1992)]. El origen de esta pérdida de intensidad se debe a la extinción de energía acústica, la cual representa la energía total eliminada por las burbujas mediante dispersión acústica y absorción o disipación. Según la teoría de dispersión simple, el coeficiente de atenuación, por superposición lineal, puede ser expresado en términos de la sección eficaz de extinción como

$$\alpha = \int_0^\infty \delta \sigma_e f(R_o) dR_o. \quad (4.10)$$

Nótese que, si la suspensión de microburbujas fuese monodispersa, este parámetro sería simplemente $\alpha = \delta\sigma_e$. En este caso, el valor máximo de la atenuación se alcanzará para la frecuencia natural de las burbujas ω_n . Experimentalmente, el coeficiente de atenuación de cada muestra se obtendrá a través de la comparación de la intensidad acústica transmitida, con una medida de referencia I_{ref} asociada a un medio libre de burbujas [Marsh (1997), Gong (2010), Kopechek (2011)]. Más detalles sobre la caracterización experimental y las medidas de atenuación se darán en la Sec. 4.3.

4.3. Materiales y métodos

Los métodos tradicionales para la generación de microburbujas de contraste, como la sonicación o agitación mecánica, dan lugar a suspensiones con un alto índice de polidispersión, siendo imposible manipular y controlar el diámetro medio y la distribución de tamaños resultante. No obstante, estos métodos están ampliamente extendidos en aplicaciones médicas y farmacéuticas debido a su bajo coste, su simplicidad y su elevado ratio de producción [Stride (2009)]. Sin embargo, con el fin de mejorar y optimizar la respuesta acústica colectiva de las burbujas en las aplicaciones clínicas descritas, es necesario desarrollar un método sencillo y repetitivo para producir microburbujas monodispersas. Por otro lado, la caracterización acústica de los agentes de contraste será más precisa si se usa suspensiones monodispersas en vez de polidispersas [Gong (2010)].

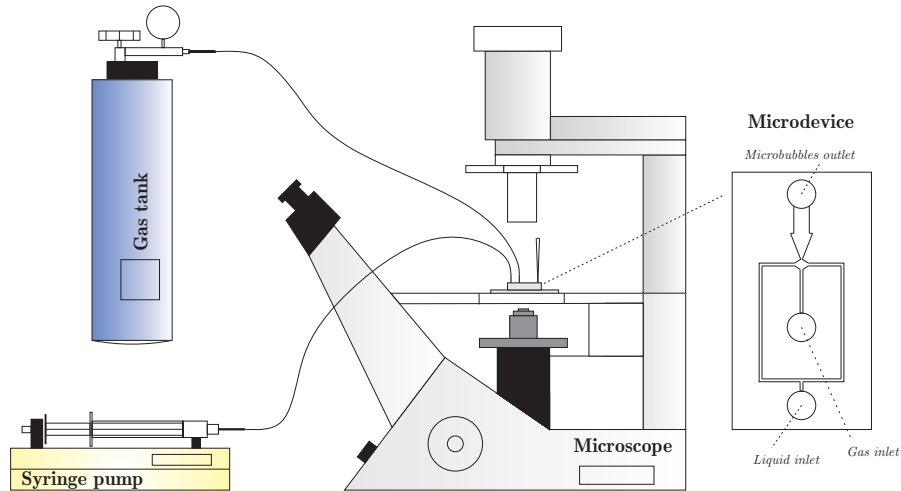


Figura 4.1: Montaje experimental microfluídico para la producción de microburbujas de contraste. El esquema del microdispositivo *flow-focusing* está inspirado por Hettiarachchi et al. [Hettiarachchi (2007)]

4.3.1. Generación de microburbujas monodispersas

La producción masiva de microburbujas de contraste monodispersas (10^3 a 10^5 μ burbujas/segundo) puede ser lograda usando técnicas microfluídicas [Gordillo (2004), Garstecki (2005), Garstecki (2005)]. En nuestro caso, hemos fabricado diferentes microdispositivos de polidimetilsiloxano (PDMS) siguiendo métodos de litografía blanda. La

geometría de los microcanales de los dispositivos ha sido diseñada para poder operarlos bajo dos regímenes diferentes de generación de microburbujas: *flow-focusing* y *co-flow*. Una vez que los microcanales son copiados al dispositivo de PDMS, este es tratado en un horno de plasma para luego ser sellado sobre un cristal portamuestras con el fin de monitorizar la producción de microburbujas usando un microscopio invertido (Fig. 4.1).

Para el diseño del microdispositivo *flow-focusing*, hemos seguido el propuesto por Hettiarachchi et al. [Hettiarachchi (2007)]. Para generar las microburbujas de contraste, una solución acuosa de lípidos y el gas octofluoropropano son impulsados a través de sus respectivos microcanales. El caudal de la solución lipídica (~ 0.3 ml/h) está controlado con una bomba de jeringa (KDS100, Fisher Scientific), mientras que la presión del octofluoropropano (~ 6 psi), y por tanto su flujo, se controla con una regulador de presión montado sobre la bombona de gas (Fig. 4.1). Manteniendo el caudal del líquido y la presión del gas constante, se pueden producir suspensiones de microburbujas con una distribución de tamaños muy estrecha [Hettiarachchi (2007), Gong (2010)]. Por otro lado, para el diseño del microdispositivo *co-flow*, hemos elegido el inspirado por Castro-Hernandez et al. [Castro-Hernandez (2011)]. En este caso, se usa aire en vez de octofluoropropano, manteniendo la misma solución de lípidos. El flujo de gas y de líquido es controlado ahora por dos reguladores de presión independientes, de manera que las presiones de operación son del orden de 2.30 y 2.50 bar respectivamente.

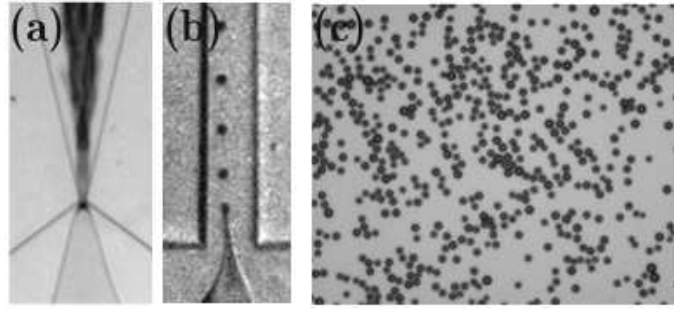


Figura 4.2: Generación de microburbujas de contraste. (a) Microdispositivo *flow-focusing*. (b) Microdispositivo *co-flow*. (c) Micrografía de una muestra monodispersa con un tamaño medio de burbuja de $12\ \mu\text{m}$ aproximadamente.

Se puede comprobar que, para generar microburbujas monodispersas con el mismo tamaño medio, necesitamos presiones más altas cuando se usa el dispositivo *co-flow*, por lo que puede presentar un riesgo de daño mecánico más elevado. En contraste, los dispositivos *flow-focusing* tienen un mayor riesgo de bloqueo dado que el diámetro de su orificio ($7\ \mu\text{m}$) es casi diez veces más pequeño que la anchura del microcanal en la configuración *co-flow* ($50\ \mu\text{m}$) como se observa en Fig. 4.2. Por último, la gran ventaja del diseño de estos últimos microdispositivos es el elevado ratio de producción (hasta 10^5 $\mu\text{burbujas/segundo}$), lo que da lugar a suspensiones altamente concentradas de agentes de contraste monodispersos. Con el fin de recolectar las microburbujas recubiertas para las medidas de distribución de tamaños y su caracterización acústica, una punta de pipeta es insertada en el orificio de salida del microdispositivo. Finalmente, la suspensión resultante es recogida del interior de la pipeta de forma sucesiva usando una jeringuilla dotada de una aguja hipodérmica.

El montaje experimental microfluídico usado, nos permite controlar el tamaño me-

dio de las microburbujas de contraste simplemente ajustando la presión del gas y el caudal del líquido. Un microscopio invertido (Nikon) es usado tanto para monitorizar la producción de burbujas, como para capturar micrografías de la suspensión para su caracterización visual. La distribución de tamaños de cada muestra es finalmente medida usando un Coulter Counter (Z2, Beckman Coulter, Inc.), o por métodos de difracción láser (LA-950, Horiba Scientific). Con el fin de comparar la caracterización acústica experimental, con las predicciones teóricas para la atenuación de las muestras, la distribución de tamaños obtenida es ajustada de forma analítica por una función de densidad tipo Weibull (Fig. 4.3), la cual se escribe

$$f(R_o) = \frac{\mu K}{\bar{R}_o} \left(\mu \frac{R_o}{\bar{R}_o} \right)^{K-1} e^{-\left(\mu \frac{R_o}{\bar{R}_o} \right)^K}, \quad (4.11)$$

donde \bar{R}_o es el radio medio de la distribución, y $\mu = [(K - 1)/K]^{1/K}$.

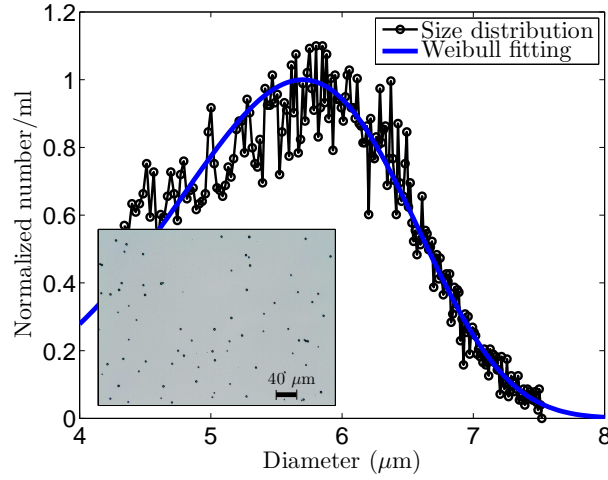


Figura 4.3: Distribución de tamaños medido con Coulter Counter, ajustada con una función de densidad tipo Weibull con $K = 6.8$ y $\bar{R}_o \simeq 2.85 \mu\text{m}$.

En los experimentos, las microburbujas han sido recubiertas por una monocapa de fosfolípidos hecha de la mezcla DPPC, DPPA and DPPE-PEG5000 en un ratio molar 81:8:10. Para favorecer la mezcla, la preparación de la solución de lípidos comienza con la disolución de los polvos de fosfolípidos en cloroformo, el cual es posteriormente evaporado usando un rotavapor. La película lipídica resultante tras la evaporación es rehidratada con una solución de 10 % glycerol, 10 % propylene glycol y 80 % agua desionizada [Hettiarachchi (2007), Gong (2010)]. Antes de ser bombeada a través de los microdispositivos, la solución de lípidos es sonicada y filtrada para destruir y eliminar posibles agregados, polvo y partículas de gran tamaño que pudieran bloquear los microcanales.

4.3.2. Caracterización acústica

El espectro de atenuación en diferentes muestras monodispersas se ha medido con el fin de caracterizar las propiedades acústicas de las suspensiones de microburbujas de

contraste (Fig. 4.4). Para tal propósito, ha sido fabricado un contenedor de muestras para confinar la suspensión durante los experimentos. El contenedor, hecho de polimetilmetacrilato (PMMA), contiene una ventana acústica consistente en una cámara de 4 mm de profundidad, la cual está cubierta por dos láminas de Mylar (PET) de $12\ \mu\text{m}$ de espesor. Por otro lado, dos transductores piezoeléctricos diferentes, con 2.25 MHz (Panametrics, USA) y 1 MHz (Met-flow, Switzerland) de frecuencia central respectivamente, se usaron como transmisores acústicos. De esta manera, antes de realizar las medidas, el contenedor de muestras es sumergido en una tanque de agua desionizada y es posicionado en frente de un reflector de acero, el cual se situa en la región focal del transductor.

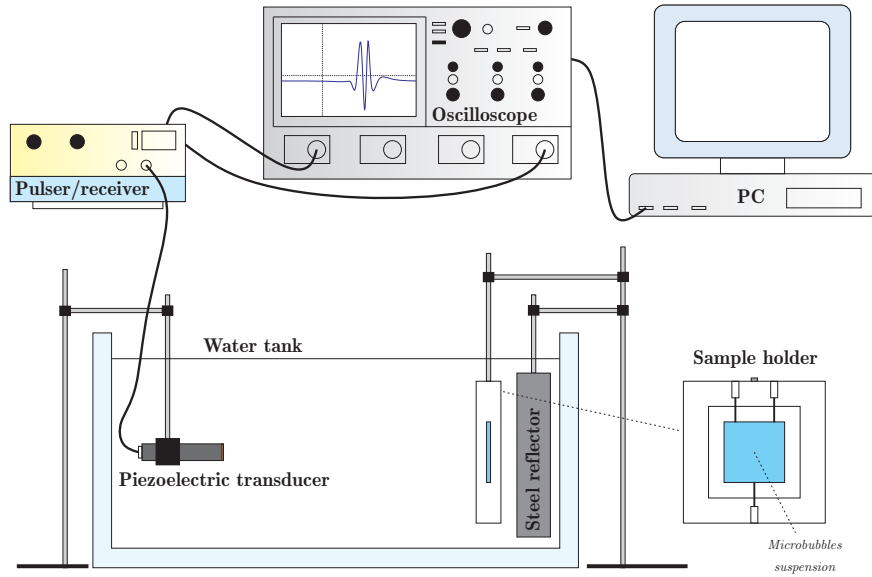


Figura 4.4: Montaje experimental acústico (correspondiente al transductor de 2.25 MHz) para la medida de la atenuación en suspensiones de microburbujas de contraste.

El primer transductor ha sido operado como transmisor/receptor con el fin de medir la señal acústica resultante utilizando un mismo dispositivo, siendo excitado por un generador de pulsos (5072PR, Panametrics, USA). Por tanto, el transductor emite un pulso acústico que viaja tanto a través del agua como de la cámara de muestras, volviendo de nuevo a la superficie activa del transductor después de reflejarse en el bloque de acero. Estas reflexiones son amplificadas por el propio generador de pulsos, y son digitalizadas por un osciloscopio (Wavesurfer 64XS, LeCroy, USA) antes de ser guardadas en un PC para el posterior análisis espectral [Gong (2010), Kopechek (2011)]. En contraste, el transductor de 1 MHz ha sido operado como transmisor, siendo excitado según una señal de onda cuadrada de un solo ciclo (65 % duty cycle) generada por un generador de ondas arbitrario (3390, Keithley Instruments). En este caso, se prescinde del reflector de acero, usándose en cambio un hidrófono de aguja (100-100-1, Müller) con el fin de medir directamente la señal acústica transmitida. Esta señal es finalmente amplificada (MVA-10, Müller) antes de ser digitalizada.

Como etapa preliminar a las medidas de atenuación, es necesario adquirir y guardar la señal de referencia del transductor. El espectro de transmisión acústica de referencia I_{ref} , medido para un muestra libre de burbujas, se muestra en la Fig. 4.5 para el

transductor de 1 MHz. Efectivamente, observamos que la intensidad máxima transmitida se alcanza, aproximadamente, para la frecuencia central del transductor dada por el fabricante. En cambio, cuando se usa una muestra de microburbujas de contraste, la transmisión que se mide I_{sample} cambia debido a las propiedades de dispersión y absorción de las burbujas, las cuales son dependientes de la frecuencia de excitación. Como se puede comprobar, una banda prohibida de transmisión, notablemente estrecha, aparece en consecuencia. Por tanto, usando la expresión $dI = -\alpha I(z)dz$, podremos escribir finalmente el coeficiente de atenuación de cada muestra como

$$\alpha = \frac{1}{l} \ln \left(\frac{I_{ref}}{I_{sample}} \right), \quad (4.12)$$

donde l es la distancia total que recorre la onda acústica a través de la suspensión de microburbujas.

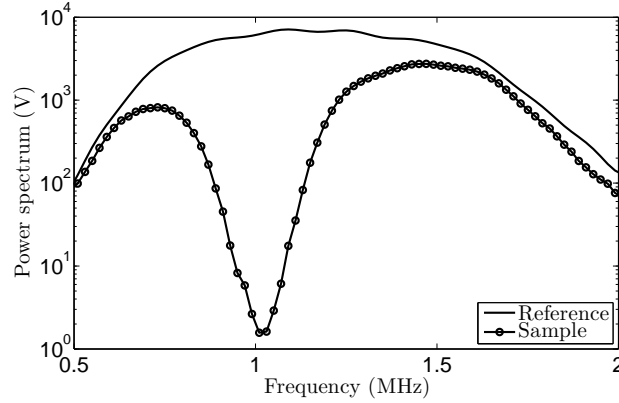


Figura 4.5: Espectro de la transmisión acústica de la señal de referencia (usando el transductor de 1 MHz), y la correspondiente a una muestra monodispersa de microburbujas.

4.4. Resultados y discusión

Usando en primer lugar el microdispositivo *flow-focusing*, hemos generado diferentes muestras de microburbujas encapsuladas con muy bajo índice de polidispersión, estando su diámetro medio en torno a $5.9 \pm 0.2 \mu\text{m}$ como muestra la Fig. 4.3. En la Fig. 4.6 se muestran las medidas del coeficiente de atenuación para suspensiones monodispersas, excitadas por el transductor de 2.25 MHz. Vemos que el espectro de atenuación posee un pico máximo, muy estrecho, en torno a la frecuencia de resonancia media de las burbujas, como predice la teoría. A pesar de que la generación de las burbujas fue llevada a cabo usando el mismo microdispositivo con unas condiciones operacionales fijas, el tamaño medio de cada muestra varía ligeramente, y en consecuencia, observamos un pequeño desplazamiento en la frecuencia de atenuación máxima. De menor a mayor concentración de burbujas en la Fig. 4.6, el pico máximo medido se da para 1.29, 1.29, 1.31 y 1.37 MHz, correspondiente a radios medios de 3, 3, 2.95 y 2.85 μm respectivamente. Como se ha dicho, se observa que el espectro de atenuación es notablemente estrecho alrededor del pico de resonancia, lo cual es debido a una distribución de tamaños cuasi-monodisperso. En cambio, cuando se usa una muestra polidispersa generada por agitación, vemos en

la Fig. 4.7 que la atenuación medida presenta un espectro mucho más ancho, con un pico de resonancia aplanado y difícil de identificar [Gong (2010), Gorce (2000)].

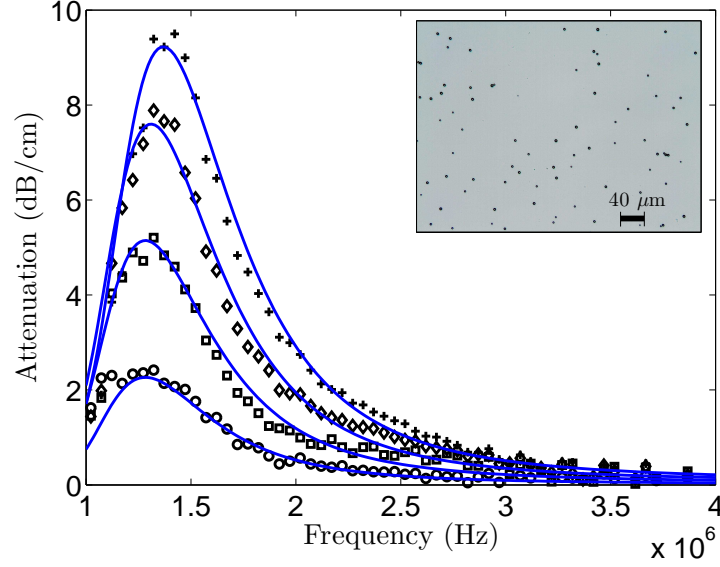


Figura 4.6: Coeficiente de atenuación para una muestra monodispersa ($\bar{R}_o \simeq 3 \mu\text{m}$) a diferentes concentraciones. \circ : $\delta = 1.4 \times 10^3$, \square : $\delta = 3.5 \times 10^3$, \diamond : $\delta = 5.3 \times 10^3$ and $+$: $\delta = 6.5 \times 10^3$ microbubbles/ml. Las curvas azules (—) representan la atenuación teórica ajustada. Los parámetros viscoelásticos resultantes son: módulo elástico $\chi = 0.28 \text{ N/m}$, y viscosidad superficial $\kappa_s = 3 \times 10^{-8} \text{ kg/s}$.

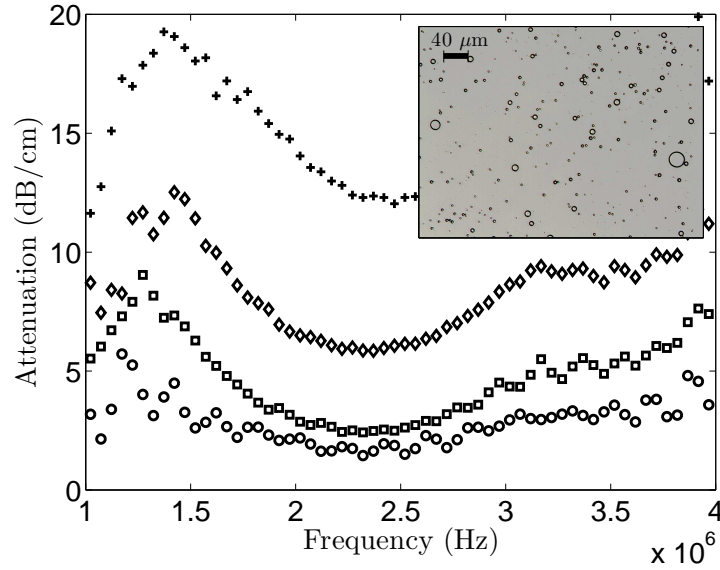


Figura 4.7: Coeficiente de atenuación para una muestra polidispersa a diferentes concentraciones. \circ : $\delta = 1.2 \times 10^5$, \square : $\delta = 2.2 \times 10^5$, \diamond : $\delta = 3.1 \times 10^5$ and $+$: $\delta = 4.5 \times 10^5$ microbubbles/ml.

De los anteriores resultados, comprobamos que el nivel de atenuación para cada frecuencia es proporcional a la concentración de microburbujas en cada muestra. Este escalado es solamente válido para suspensiones con una baja concentración, de manera que los fenómenos de dispersión múltiple pueden ser despreciados [Marsh (1997)]. En este rango de concentraciones, usaremos la teoría de dispersión simple (Sec. 4.2) para obtener la energía acústica total eliminada por las microburbujas: el coeficiente de atenuación de la muestra es proporcional a la suma de la sección eficaz de extinción de las burbujas. Como se ha demostrado, la extinción depende del tamaño de la microburbuja, de la frecuencia de excitación y, finalmente, de las propiedades viscoelásticas del recubrimiento lipídico, es decir, $\sigma_e(R_o, \omega_o, \chi, \kappa_s)$. Aunque resulta muy complicado medir experimentalmente la elasticidad y viscosidad por métodos directos, se puede realizar una estimación ajustando las predicciones de la teoría de dispersión simple con las medidas de atenuación obtenidas [Unger (2004), Hoff (1996), de Jong (2002), de Jong (1992), de Jong (2009)]. De acuerdo con la distribución de tamaños de las muestras monodispersas, se ha logrado ajustar de forma satisfactoria las curvas de atenuación teórica estableciendo un valor $\chi = 0.28$ N/m para el módulo elástico, y $\kappa_s = 3 \times 10^{-8}$ kg/s para la viscosidad superficial del recubrimiento (Fig. 4.6). Estos valores estimados están en muy buena consonancia con los obtenidos por estudios experimentales previos [Sarkar (2005), van der Meer (2007), Sijl (2008), Tu (2009)].

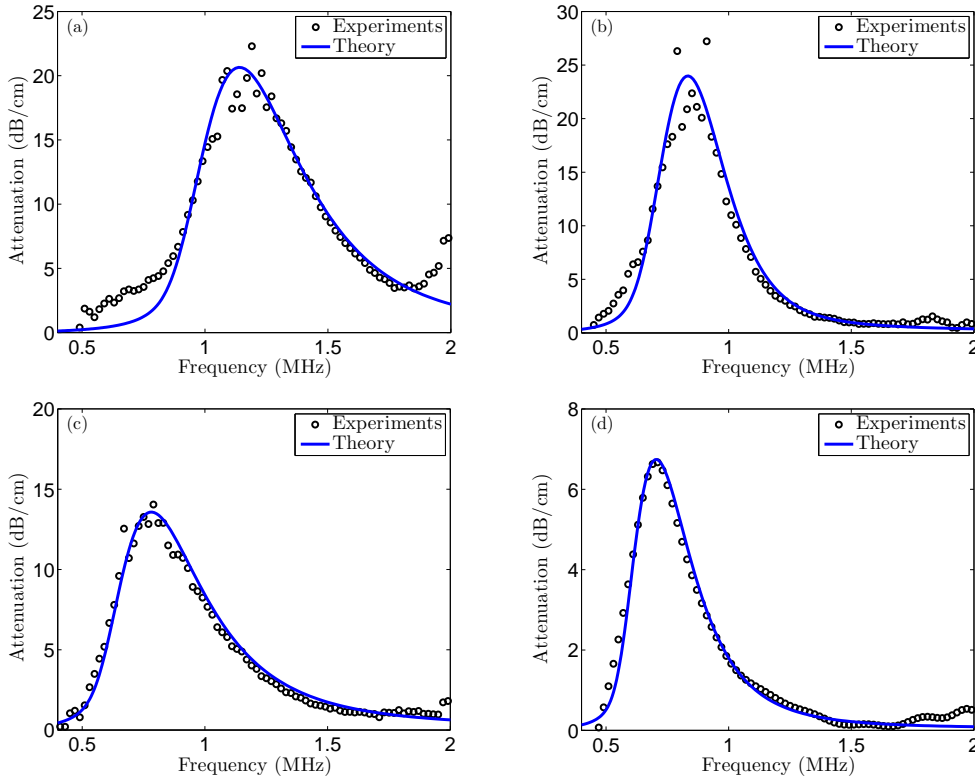


Figura 4.8: Coeficiente de atenuación para diferente muestras monodispersas. (a) $\bar{R}_o = 3.7 \mu\text{m}$, (b) $\bar{R}_o = 4.8 \mu\text{m}$, (c) $\bar{R}_o = 5.5 \mu\text{m}$, (d) $\bar{R}_o = 6.3 \mu\text{m}$.

Como se espera para las muestras polidispersas, la dificultad en la identificación tanto del pico de de resonancia principal, como del ancho de banda asociado a los

mecanismos de disipación (Fig. 4.7), conduce a un alto rango de incertidumbre en la estimación de los parámetros que definen el recubrimiento [Gong (2010)]. Además, el hecho de que el comportamiento viscoelástico real del encapsulamiento sea no lineal, como mucho autores han reportado, puede causar importantes errores en la etapa de estimación dado que estos parámetros varían con el radio de equilibrio de la microburbuja. Para confirmar experimentalmente este efecto no lineal, se ha medido la atenuación acústica para muestras monodispersas con distintas distribuciones de tamaños y radios medios, generadas usando microdispositivos con configuración *co-flow*. Para tal fin, estas muestras se excitaron con el transductor de 1 MHz, adquiriéndose las señales transmitidas directamente con el hidrófono de aguja. Los resultados experimentales y las curvas ajustadas se representan en la Fig. 4.8. Como podemos comprobar, el pico de resonancia principal toma valores de frecuencia decrecientes a medida que el tamaño medio de las burbujas aumenta, lo que está en consonancia con las predicciones teóricas. Finalmente, los parámetros viscoelásticos estimados para cada muestra se representan en el Cuadro 4.1 y en la Fig. 4.9. Estos resultados son coherentes con la tendencia encontrada por Doinikov et al., la cual muestra que tanto el módulo elástico como la viscosidad superficial, aumentan linealmente a medida que el tamaño de equilibrio de las microburbujas crece [Doinikov (2011), Tu (2009), Doinikov (2009)]. Las pendientes resultantes de cada regresión lineal son 1.8×10^5 y 9×10^{-3} respectivamente. De hecho, esta corrección no lineal para el modelo viscoelástico es capaz de explicar de forma natural el comportamiento *compression-only* encontrado por Marmottant et al. cuando las microburbujas encapsuladas realizan oscilaciones moderadamente amplias [Marmottant (2005), Doinikov (2009)].

\bar{R}_o (μm)	f_n (MHz)	χ (N/m)	κ_s ($\times 10^{-8}$ kg/s)
2.9	1.37	0.28	3.0
3.7	1.14	0.35	3.6
4.8	0.84	0.50	4.2
5.5	0.78	0.76	5.4
6.3	0.70	0.85	6.0

Cuadro 4.1: Resultados obtenidos para la caracterización acústica, y para la estimación de las propiedades viscoelásticas del recubrimiento lipídico usando muestras de agentes de contraste monodispersos con diferentes tamaños medios de microburbuja.

4.5. Conclusiones

En este estudio, hemos medido el espectro de atenuación acústica para suspensiones de microburbujas encapsuladas por fosfolípidos sobre un rango de frecuencias que incluye la frecuencia natural de estas. La atenuación para muestras monodispersas se caracteriza por tener un espectro con una ancho de banda muy estrecho alrededor de la resonancia. Los resultados obtenidos en este trabajo experimental muestran la gran ventaja de usar suspensiones monodispersas para la caracterización acústica de agentes de contraste ultrasónicos. De hecho, las técnicas microfluídicas, como las usadas en este trabajo (*flow-focusing* y *co-flow*), permiten producir microburbujas de contraste monodispersas de forma masiva, con un preciso control sobre su tamaño medio. Además, las medidas

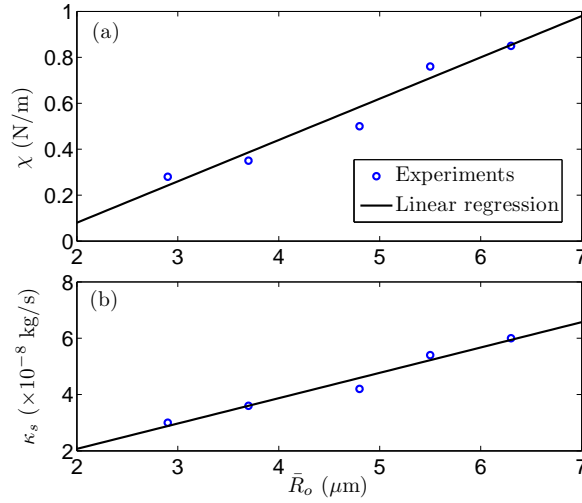


Figura 4.9: Estimación experimental de los parámetros viscoelásticos en función del radio de equilibrio medio para distintas muestras monodispersas. (a) Regresión lineal para el módulo elástico: $\chi = 1.8 \times 10^5 \bar{R}_o - 0.28$. (b) Regresión lineal para la viscosidad superficial: $\kappa_s = 9 \times 10^{-3} \bar{R}_o + 2.7 \times 10^{-9}$.

experimentales de la atenuación de estas suspensiones (para bajas concentraciones) nos da, de forma indirecta, una estimación para los parámetros viscoelásticos que definen al recubrimiento lipídico. Como ha sido reportado por varios autores, estos parámetros varían con el radio de equilibrio de la burbuja debido al comportamiento no lineal de la membrana. Dado que, para la caracterización acústica, usamos muestras monodispersas, nuestro método experimental asegura una estimación precisa para las propiedades del recubrimiento. Este método elimina, por tanto, la incertidumbre que aparecería al tratar con muestras polidispersas de microburbujas como comúnmente se hace.

Bibliografía

- [Gremiak (1968)] R. Gremiak & P.M. Shah, "Echocardiography of the aortic root." *Invest. Radiol.*, vol. 3, pp. 356 – 388 (1968)
- [Stride (2003)] E. Stride & N. Saffari, "Microbubble ultrasound contrast agents: a review." *Proc. Instn Mech. Engrs*, vol. 217, Part H: J. Engineering in Medicine, pp. 429 – 447 (2003)
- [Calliada (1998)] F. Calliada, R. Campani, O. Bottinelli, A. Bozzini & M.G. Sommaruga, "Ultrasound contrast agents: basic principles." *European Journal of Radiology*, vol. 27, pp. 157 – 160 (1998)
- [Dijkmans (2004)] P.A. Dijkmans, L.J.M. Juffermans, R.J.P. Musters, A. van Wamel, F.J. ten Cate, W. van Gilst, C.A. Visser, N. de Jong & O. Kamp, "Microbubbles and ultrasound: from diagnosis to therapy." *Eur. J. Echocardiography*, vol. 5, pp. 245 – 256 (2004)

- [Ferrara (2007)] K. Ferrara, R. Pollard & M. Borden, "Ultrasound microbubble contrast agents: fundamentals and application to gene and drug delivery." *Annu. Rev. Biomed. Eng.*, vol. 9, pp. 415 – 447 (2007)
- [Unger (2004)] E.C. Unger, T. Porter, W. Culp, R. Labell, T. Matsunaga & R. Zutshi, "Therapeutic applications of lipid-coated microbubbles." *Advanced Drug Delivery Reviews*, vol. 56, pp. 1291 – 1314, (2004)
- [Hoff (1996)] L. Hoff, "Acoustic properties of ultrasonic contrast agents." *Ultrasonics*, vol. 34, pp. 591 – 593 (1996)
- [de Jong (2002)] N. de Jong, A. Bouakaz & P. Frinking, "Basic acoustic properties of microbubbles." *Echocardiography*, vol. 19(3), pp. 229 – 240 (2002)
- [de Jong (1992)] N. de Jong & L. Hoff, "Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres." *Ultrasonics*, vol. 30(2), pp. 95 – 103 (1992)
- [Marsh (1997)] J.N. Marsh & C.S. Hall, "Broadband through-transmission signal loss measurements of Albunex suspensions." *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 34(2), pp. 1155 – 1161 (1997)
- [Marmottant (2005)] P. Marmottant, S. van der Meer, M. Emmer, M. Versluis, N. de Jong, S. Hilgenfeldt & D. Lohse, "A model for large amplitude oscillations of coated bubbles accounting for buckling and rupture." *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118(6), pp. 3499 – 3505 (2005)
- [Doinikov (2011)] A. Doinikov & A. Bouakaz, "Review of shell models for contrast agent microbubbles." *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 58(5), pp. 981 – 993 (2011)
- [Borden (2002)] M. Borden & M. Longo, "Dissolution behavior of lipid monolayer-coated, air-filled microbubbles: effect of lipid hydrophobic chain length." *Langmuir*, vol. 18, pp. 9225 – 9233 (2002)
- [Roy (1990)] R. Roy, C. Church & A. Calabrese, "Cavitation produced by short pulses of ultrasound." *Frontiers of Nonlinear Acoustics: Proceedings of 12th ISNA*, London, UK, Elsevier, pp. 476 – 481 (1990)
- [Church (1995)] C. Church, "The effect of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles." *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 97(3), pp. 1510 – 1521 (1995)
- [Prosperetti (1986)] A. Prosperetti & A. Lezzi, "Bubble dynamics in a compressible liquid. Part 1. First-order theory." *J. Fluid Mech.*, vol. 168, pp. 457 – 478 (1986)
- [Devin (1959)] C. Devin, "Survey of thermal, radiation, and viscous damping of pulsating air bubbles in water." *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31(12), pp. 1654 – 1667 (1959)
- [Prosperetti (1977)] A. Prosperetti, "Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids." *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 61(1), pp. 17 – 27 (1977)

- [Prosperetti (1988)] A. Prosperetti, L. Crum & K. Commander, “Nonlinear bubble dynamics.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83(2), pp. 502 – 514 (1988)
- [Hilgenfeldt (1998)] S. Hilgenfeldt, D. Lohse & M. Zomack, “Response of bubbles to diagnostic ultrasound: a unifying theoretical approach.” *Eur. Phys. J. B*, vol. 4, pp. 247 – 255 (1998)
- [Stride (2009)] E. Stride & M. Edirisinghe, “Novel preparation techniques for controlling microbubble uniformity: a comparison.” *Med. Biol. Eng. Comput.*, vol. 47, pp. 883 – 892 (2009)
- [Hettiarachchi (2007)] K. Hettiarachchi, E. Talu, M.L. Longo, P.A. Dayton & A.P. Lee, “On-chip generation of microbubbles as a practical technology for manufacturing contrast agents for ultrasonic imaging.” *Lab Chip*, vol. 7, pp. 463 – 468 (2007)
- [Castro-Hernandez (2011)] E. Castro-Hernandez, W. van Hoeve, D. Lohse & J.M. Gordillo, “Microbubble generation in a co-flow device operated in a new regime.” *Lab Chip*, vol. 11, pp. 2023 – 2029 (2011)
- [Gordillo (2004)] J.M. Gordillo, Z.D. Cheng, A.M. Ganan-Calvo, M. Marquez & D.A. Weitz, “A new device for the generation of microbubbles.” *Phys. Fluids*, vol. 16 (2004)
- [Garstecki (2005)] P. Garstecki, H.A. Stone & G.M. Whitesides, “Mechanism for flowrate controlled breakup in confined geometries: A route to monodisperse emulsions.” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94 (2005)
- [Garstecki (2005)] P. Garstecki, A.M. Ganan-Calvo & G.M. Whitesides, “Formation of bubbles and droplets in microfluidic systems.” *Bull. Pol. Acad. Sci.*, vol. 53(4), pp. 361 – 372, (2005)
- [Sarkar (2005)] K. Sarkar, W.T. Shi, D. Chatterjee & F. Forsberg, “Characterization of ultrasound contrast microbubbles using in vitro experiments and viscous and viscoelastic interface models for encapsulation.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 118(1), pp. 539 – 550 (2005)
- [van der Meer (2007)] S. van der Meer, B. Dollet, M. Voormolen, C. Chin, A. Boukaz, N. de Jong, M. Versluis & D. Lohse, “Microbubble spectroscopy of ultrasound contrast agents.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 121(1), pp. 648 – 656 (2007)
- [Sijl (2008)] J. Sijl, E. Gaud, P. Frinking, M. Arditi, N. de Jong, D. Lohse & M. Versluis, “Acoustic characterization of single ultrasound contrast agent microbubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 124(6), pp. 4091 – 4097 (2008)
- [de Jong (2009)] N. de Jong, M. Emmer, A. van Wammel & M. Versluis, “Ultrasonic characterization of ultrasound contrast agents.” *Med. Biol. Eng. Comput.*, vol. 47, pp. 861 – 873 (2009)
- [Doinikov (2009)] A. Doinikov, J. Haac & P. Dayton, “Modeling of nonlinear viscous stress in encapsulating shells of lipid-coated contrast agent microbubbles.” *Ultrasonics*, vol. 49, pp. 269 – 275 (2009)

- [Tu (2009)] J. Tu, J. Guan, Y. Qiu & T. Matula, “Estimating the shell parameters of SonoVue microbubbles using light scattering.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 126(6), pp. 2954 – 2962 (2009)
- [Gong (2010)] Y. Gong, M. Cabodi & T. Porter, “Relationship between size and frequency dependent attenuation of monodisperse populations of lipid coated microbubbles.” *Bubble Science, Engineering and Technology*, vol. 2(2), pp. 41 – 47 (2010)
- [Kopechek (2011)] J. Kopechek, K. Haworth, J. Raymond, T. Douglas-Mast, S. Perrin, M. Klegerman, S. Huang, T. Porter, D. McPherson & C. Holland, “Acoustic characterization of echogenic liposomes: Frequency-dependent attenuation and backscatter.” *J. Acoust. Soc. Am.*, Volume 130(5), pp. 3472 – 3482 (2011)
- [Gorce (2000)] J.M. Gorce, M. Arditi & M. Schneider, “Influence of bubble size distribution on the echogenicity of ultrasound contrast agents: a study of SonoVue.” *Investigative Radiology*, vol. 35(11), pp. 661 – 671 (2000)

Capítulo 5

Dinámica acoplada de microburbujas y dispersión múltiple

La dinámica de las oscilaciones acopladas entre las burbujas dentro de una nube ha sido formulada con el fin de reconocer y analizar los distintos comportamientos colectivos en el régimen lineal. En consecuencia, se han estudiado los modos de oscilaciones colectivas que aparecen en una nube esférica a través de la resolución del problema de autovalores asociado. A continuación, se ha analizado numérica y teóricamente la respuesta de la nube ante excitaciones acústicas externas, identificándose las frecuencias de resonancia ligadas a cada modo colectivo. Una vez caracterizadas las oscilaciones colectivas, se han estudiado las propiedades acústicas de las nubes de microburbujas a través del análisis de la sección eficaz de dispersión. De esta manera, los distintos regímenes de dispersión que aparecen han sido analizados de forma numérica y teórica con el propósito de predecir el comportamiento y la propagación de las ondas acústicas a través de nubes de burbujas.

5.1. Introducción

Tanto la dispersión del sonido como la propagación de ondas a través de suspensiones de burbujas son fenómenos que se han venido estudiando profundamente durante las últimas décadas. La principal razón de estos estudios es explicar y analizar el alto impacto de las burbujas de aire en la propagación acústica: su alta compresibilidad con respecto al medio líquido, junto al comportamiento de naturaleza resonante, hacen de la burbuja un elemento muy eficiente en cuanto a la dispersión del sonido, cambiando de forma apreciable las propiedades acústicas de la mezcla bifásica [Wood (1932), Wijngaarden (1968)]. De hecho, las aplicaciones en la industria química, o en campos tales como la oceanografía y más recientemente en la farmacia y medicina, han guiado el desarrollo de numerosos trabajos teóricos, numéricos y experimentales en los últimos años [Haïat (2011), Fuster (2011)].

El estudio clásico de la propagación y dispersión de ondas acústicas a través de nubes elimina la interacción entre las burbujas, lo cual es generalmente válido por debajo de cierto nivel de fracciones de vacío. Sin embargo, el hecho de retener estas interacciones en la dinámica de las oscilaciones, nos revela comportamientos más complejos presentes en

multitud de aplicaciones. Este acoplamiento dinámico, por tanto, constituye un caso de gran interés en diversos campos de la física y la teconología. En cuanto a la aplicaciones oceanográficas, la comprensión de estos fenómenos permiten, entre otras cosas, el diseño de técnicas de detección de bancos de peces [Hahn (2007)], y el estudio del ruido de fondo generado por burbujas oceánicas, el cual puede afectar a la adquisición de señales de sónar [Sarkar (1993), Sarkar (1994)]. En segundo lugar, el análisis detallado de las interacciones entre burbujas permiten describir y controlar el comportamiento de las nubes de cavitación presentes en técnicas industriales como la limpieza de superficies [Bremond (2006)], o en procedimientos clínicos como la litotripsia por ondas de choque [Arora (2007)].

Por último, el desarrollo de las microburbujas como agentes de contraste en diagnóstico por ultrasonidos médicos, obliga a establecer nuevos modelos que predigan el comportamiento acústico de suspensiones monodispersas. El uso clínico de este nuevo tipo de contraste, para el cual el acoplamiento entre burbujas puede ser crítico, supondría una mejoría en la precisión de las técnicas de diagnóstico. Por tanto, el estudio de la dinámica acoplada y la dispersión acústica en nubes monodispersas, nos permitirá caracterizar el comportamiento colectivo de las burbujas con el fin de definir nuevos procedimientos clínicos para la diagnóstico por ultrasonidos [Haïat (2011)].

5.2. Dinámica acoplada de burbujas

La ecuación diferencial que modela la dinámica acoplada de una burbuja i dentro de una población de N burbujas se puede plantear añadiendo en la ecuación corregida de Rayleigh-Plesset la excitación debida a las ondas dispersadas por las burbujas que la rodean [Zeravcic (2011)]. La contribución de la onda cinética se ignorará debido a que tiene un rápido decaimiento espacial, por lo que puede ser despreciada incluso a distancias relativamente pequeñas [Leighton (1994)]. Así pues, escribimos

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3}{2} \dot{R}_i^2 = -\frac{1}{\rho_\infty} (p_{ai} + p_\infty) + \frac{1}{\rho_\infty} \left[p_{g0i} \left(\frac{R_i}{R_{oi}} \right)^{-3\kappa} - \frac{2\sigma}{R_i} - 4\mu_{Ei} \frac{\dot{R}_i}{R_i} \right] - \frac{1}{\rho_\infty} \sum_{j \neq i}^N \frac{\rho_\infty}{r_{ij}} \left[R_j^2(\tau_{ij}) \ddot{R}_j(\tau_{ij}) + 2R_j(\tau_{ij}) \dot{R}_j^2(\tau_{ij}) \right], \quad (5.1)$$

siendo $\tau_{ij} = t - r_{ij}/c_\infty$ el tiempo retardado, con r_{ij} la distancia entre los centros de la burbuja i y la burbuja j , las cuales estarán situadas en puntos aleatorios del espacio definidos por sus coordenadas $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]$. Esta ecuación, por tanto, gobierna de forma completa las oscilaciones de las burbujas dentro de una nube, teniendo en cuenta todos sus mecanismos de amortiguamiento y todas las interacciones dinámicas entre el resto de burbujas.

La linealización de la expresión (5.1) alrededor del radio de equilibrio de las burbujas nos lleva al siguiente sistema de osciladores armónicos acoplados [Feuillade (1995), Zeravcic (2011)]

$$\ddot{X}_i + 2d_i \dot{X}_i + \omega_{ni}^2 X_i = -\frac{1}{\rho_\infty R_{oi}^2} \left[p_{ai} + \sum_{j \neq i}^N \rho_\infty R_{oj}^3 \frac{\ddot{X}_j(\tau_{ij})}{r_{ij}} \right], \quad (5.2)$$

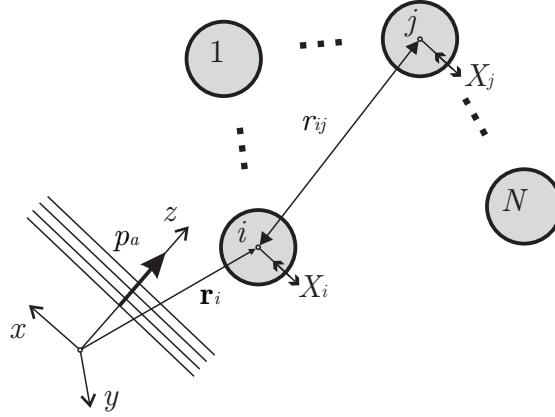


Figura 5.1: Esquema de la dinámica acoplada y oscilaciones colectivas en nubes de burbujas. Una onda plana, la cual se propaga a lo largo del eje z , excita a las burbujas induciendo sobre ellas unas oscilaciones dadas por X_i . La posición de las burbujas, localizadas aleatoriamente en el espacio, viene dada por el vector \mathbf{r}_i .

donde se ha asumido que $R_i = R_{oi}(1 + X_i)$, con $|X_i| \ll 1$. Sea una excitación monocromática provocada por la onda plana $p_a = P_a \exp(\imath k z) \exp(-\imath \omega_o t)$, la cual se propaga a lo largo del eje z como se representa en la Fig. 5.1. En consecuencia, las burbujas realizarán unas oscilaciones de la forma $X_i = \hat{X}_i \exp(\imath k z_i) \exp(-\imath \omega_o t)$. Así pues, la solución para la dinámica acoplada será

$$\hat{X}_i = \frac{-1/\rho_\infty \omega_o^2 R_{oi}^2}{(\omega_{ni}/\omega_o)^2 - 1 - \imath \Gamma_i} \left[P_a - \sum_{j \neq i}^N \rho_\infty \omega_o^2 R_{oj}^3 \hat{X}_j e^{\imath k(z_j - z_i)} \frac{e^{\imath k r_{ij}}}{r_{ij}} \right], \quad (5.3)$$

expresión que constituye un sistema lineal de N ecuaciones para las N incógnitas $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_N$ asociadas a las oscilaciones de cada burbuja. Nótese que estamos trabajando con una amplitud compleja definida por $\hat{X}_i = |\hat{X}_i| \exp(\imath \phi_i)$, siendo $|\hat{X}_i| = \varepsilon_i$ la amplitud de las oscilaciones y ϕ_i su fase con respecto a la excitación. Como vemos, esta solución es similar a la correspondiente para las oscilaciones de una burbuja excitada de forma aislada, excepto por la componente debida a la dinámica de las burbujas que la rodean. Este término de acoplamiento actúa como una fuente de excitación acústica secundaria, modificando por tanto la amplitud y fase final de las oscilaciones de las burbujas que forman la nube. En notación matricial, el sistema lineal de ecuaciones representado por la expresión (5.3) se puede reescribir de la manera

$$(\mathbf{K} - \omega_o^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{X}} = -\mathbf{\Pi}, \quad (5.4)$$

siendo $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{X}_1 \dots, \hat{X}_N]$ el vector de oscilaciones, y $\mathbf{\Pi} = P_a [R_{o1}^{-2} \dots, R_{oN}^{-2}] / \rho_\infty$ el vector de excitación. La matriz de *rigidez* \mathbf{K} es una matriz diagonal cuyos elementos están formados por las frecuencias naturales de cada burbuja, es decir, $K_{ii} = \omega_{ni}^2$. Finalmente, la matriz de *inercia* \mathbf{M} estará definida por

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 + \imath \Gamma_i & \text{si } i = j \\ \frac{R_{oj}^3}{R_{oi}^2} e^{\imath k(z_j - z_i)} \frac{e^{\imath k r_{ij}}}{r_{ij}} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.5)$$

la cual será simétrica solamente para el caso de poblaciones monodispersas de burbujas en el límite de medio incompresible. La resolución del sistema (5.4) nos permitirá conocer de forma directa la amplitud y fase de las oscilaciones de cada burbuja teniendo en cuenta el acoplamiento dinámico presente en la nube [Feuillade (1995)]. Como se observa, los términos de la diagonal en ambas matrices contienen la información relativa a la dinámica de la burbuja como ente individual y aislado (frecuencia natural y amortiguamiento). Por el contrario, cada término fuera de la diagonal de la matriz de inercia representa el acoplamiento dinámico entre pares de burbujas, el cual no depende de las propiedades de estas, sino de sus dimensiones, separación y longitud de onda de la excitación. Comprobamos que si la distancia entre burbujas es infinitamente grande, $r_{ij} \rightarrow \infty$, los términos de acoplamiento tienden a un valor nulo y la matriz de inercia será diagonal. En consecuencia, las ecuaciones del sistema (5.4) quedan desacopladas. Es decir, en este límite las oscilaciones de las burbujas no se afectarán mutuamente, como era de esperar.

5.2.1. Modos de oscilaciones colectivas

Si consideramos una excitación acústica nula, podremos resolver el problema de autovalores asociado al sistema dinámico acoplado con el fin de obtener las frecuencias naturales y los modos de oscilaciones colectivas de la población de burbujas [Zeravcic (2011)]. Nótese que existirán tantos modos y frecuencias propias como número de burbujas haya en la nube. Así pues, si llamamos λ_v a los autovalores y $\hat{\mathbf{X}}_v$ a los autovectores correspondientes, podemos escribir

$$(\mathbf{K} - \lambda_v \mathbf{M}) \hat{\mathbf{X}}_v = 0. \quad (5.6)$$

Como se puede comprobar, las matrices de rigidez e inercia dependen de la frecuencia de excitación a través de la frecuencia natural de la burbuja, del coeficiente de amortiguamiento, y finalmente de los términos de acoplamiento. Esto hace que el cálculo exacto de los modos y frecuencias naturales colectivas a través del problema de autovalores sea inabordable de forma general. Sin embargo, podemos realizar algunas hipótesis para eliminar la dependencia con ω_o de estas matrices. Por un lado, si el medio en donde se encuentran inmersas las burbujas se puede considerar incompresible, los términos de acoplamiento se podrán aproximar por $R_{oj}^3 R_{oi}^{-2} / r_{ij}$, de manera que los efectos dinámicos se acoplan de forma instantánea. Por otro lado, como ya se demostró, las oscilaciones de las microburbujas de entre $1 \mu\text{m}$ y $10 \mu\text{m}$ de tamaño son esencialmente isotérmicas [Prosperetti (1988)], pudiéndose aproximar su frecuencia natural por $\omega_n = [p_{g0}(3 - W)/\rho_\infty R_o^2]^{1/2}$. Por último, si suponemos un coeficiente $\Gamma_i \ll 1$ durante las oscilaciones, podremos obtener de forma numérica la solución al problema de autovalores no amortiguado.

Veamos a continuación la solución analítica del problema de autovalores (5.6) para la configuración más sencilla posible: una nube de $N = 2$ burbujas monodispersas de radio R_o , separadas una distancia D . Al considerar burbujas de igual tamaño, sus frecuencias naturales serán idénticas, es decir, $\omega_{ni} = \omega_n$. Por tanto, una vez resuelto el polinomio característico de segundo grado, obtenemos los siguientes dos autovalores

$$\lambda_{v1} = \frac{\omega_n^2(1 - R_o/D)}{1 - R_o^2/D^2} \text{ y } \lambda_{v2} = \frac{\omega_n^2(1 + R_o/D)}{1 - R_o^2/D^2}, \quad (5.7)$$

siendo entonces $\Omega_1 = \sqrt{\lambda_{v1}}$ la frecuencia colectiva principal o fundamental, y $\Omega_2 = \sqrt{\lambda_{v2}}$ la segunda frecuencia colectiva. Como podemos comprobar, los valores de estas frecuencias dependen fuertemente de la separación entre las burbujas, resultando $\Omega_1 < \omega_n < \Omega_2$. Esto revela, a grandes rasgos, lo siguiente: el acoplamiento dinámico hace que una población de burbujas tenga un modo colectivo principal a una frecuencia inferior que la frecuencia natural de las burbujas [Ida (2002)]. En contraposición, en el límite para el cual las burbujas están infinitamente separadas, $D \rightarrow \infty$, obtenemos $\Omega_1 \simeq \Omega_2 \simeq \omega_n$. Es decir, las frecuencias de los modos colectivos coinciden con la frecuencia natural de las burbujas. Esto indica, como ya se comentó, que las oscilaciones de las burbujas están desacopladas, con lo que pueden ser tratadas una a una de forma aislada. Por otro lado, los modos colectivos (amplitud y fase de las oscilaciones de cada burbuja) estarán relacionados con los autovectores del problema. Así pues, los dos autovectores asociados a λ_{v1} y λ_{v2} serán, respectivamente

$$\hat{\mathbf{X}}_{v1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \hat{\mathbf{X}}_{v2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Se observa que para ambos modos, las burbujas oscilan con la misma amplitud. Sin embargo, en el primer modo lo harán en fase y en el segundo en anti-fase [Feuillade (1995), Zeravcic (2011)]. En general, para una población de burbujas monodispersa, la parte imaginaria de sus autovectores será siempre nula, por lo que las burbujas solo podrán oscilar en fase o anti-fase. Esto no ocurrirá así para poblaciones polidispersas, donde los autovectores serán generalmente vectores complejos. Por otro lado, al haber considerado un amortiguamiento despreciable en el problema, los autovalores resultantes serán siempre reales, por lo que estarán relacionados directamente con la frecuencia natural de cada modo. Si algún tipo de amortiguamiento entrase en juego, tanto los autovalores como autovectores resultarían generalmente complejos, estando su parte imaginaria relacionada con las pérdidas totales asociadas a cada modo de oscilación colectivo [Zeravcic (2011)].

A continuación, se analizará la solución numérica del problema de autovalores para nubes esféricas monodispersas. La compacidad de la nube se ha definido a través de la fracción de vacío $\beta = 4\pi NR_o^3/3V_c$, parámetro que representa el ratio entre el volumen total de burbujas y el volumen de la nube $V_c = 4\pi A^3/3$, siendo A su radio. Otra manera de cuantificar la compacidad sería a través de la distancia media entre burbujas vecinas \bar{l} , la cual se relaciona con la fracción de vacío según $\bar{l} \sim R_o\beta^{-1/3}$. Como se puede comprobar, si la fracción de vacío de la nube tiende a un valor nulo, $\beta \rightarrow 0$, la distancia media entre las burbujas más próximas será $\bar{l} \rightarrow \infty$. Por tanto, en este límite, las oscilaciones estarán desacopladas. Las burbujas, dentro del espacio que ocupa la nube, están posicionadas de forma aleatoria, y distribuidas de forma homogénea. Para ello, usamos el siguiente algoritmo posicionador: sea $\mathbf{r}_i = [r_i, \theta_i, \phi_i]$ el vector de posición de la burbuja i en coordenadas esféricas, tomando como origen el centro de la nube. Entonces,

$$r_i = A(\nu_r^i)^{1/3}, \quad \theta_i = \arccos(2\nu_\theta^i - 1), \quad \phi_i = 2\pi\nu_\phi^i, \quad (5.9)$$

siendo ν_r^i , ν_θ^i y ν_ϕ^i tres números aleatorios $\in [0, 1]$ generados de forma independiente. La distancia entre dos burbujas cualesquiera se calcula de forma trivial usando las coordenadas cartesianas $\mathbf{r} = [x, y, z]$. Como es obvio, las coordenadas cartesianas de la burbuja i están relacionadas con las esféricas de la siguiente forma:

$$x_i = r_i \sin \theta_i \cos \phi_i, \quad y_i = r_i \sin \theta_i \sin \phi_i, \quad z_i = r_i \cos \theta_i, \quad (5.10)$$

con lo cual la distancia r_{ij} se expresa finalmente como

$$r_{ij} = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2]^{1/2}. \quad (5.11)$$

Así pues, una vez halladas las distancias entre todos los pares de burbujas, se podrá resolver finalmente el problema de autovalores, planteado en (5.6), de forma numérica.

En la Fig. 5.2 se muestra, para dos nubes con diferente población N , la densidad de estados $\text{DOS}(\Omega)$ promediada entre 50 realizaciones aleatorias. Esta magnitud está definida como

$$\text{DOS}(\Omega) = \frac{1}{N} \frac{d\eta}{d\Omega}, \quad (5.12)$$

siendo η el índice del modo correspondiente a la frecuencia Ω . Por tanto, la densidad de estados es proporcional a la cantidad de modos concentrados en torno a una determinada frecuencia [Zeravcic (2011)]. Como se observa, para una nube con un valor muy bajo de β , la gran mayoría de sus modos colectivos están concentrados alrededor de la frecuencia de resonancia de las burbujas, ω_n . Este hecho indica que dicha nube está, a efectos prácticos, dinámicamente desacoplada como era de esperar. Por el contrario, a medida que la fracción de vacío aumenta, y por tanto la nube se vuelve más compacta, los modos comienzan a distribuirse a lo largo de un espectro de frecuencias mucho más amplio. Este fenómeno se debe al acoplamiento dinámico presente entre las burbujas, lo que hace que la nube tenga un primer modo de oscilación Ω_1 a una frecuencia mucho más baja que ω_n . Nótese que, al considerar un sistema dinámico de tamaño finito, la población total de burbujas N tiene una implicación importante en el valor de la frecuencia de los modos naturales. Así pues, para dos nubes con igual β , cuanto más elevado sea el número de burbujas, mayor radio A tendrá. Como vemos, esto hace que el espectro de la densidad de estados sea más ancho, lo que implica que los modos colectivos se den generalmente para frecuencias inferiores [Yoon (1991)].

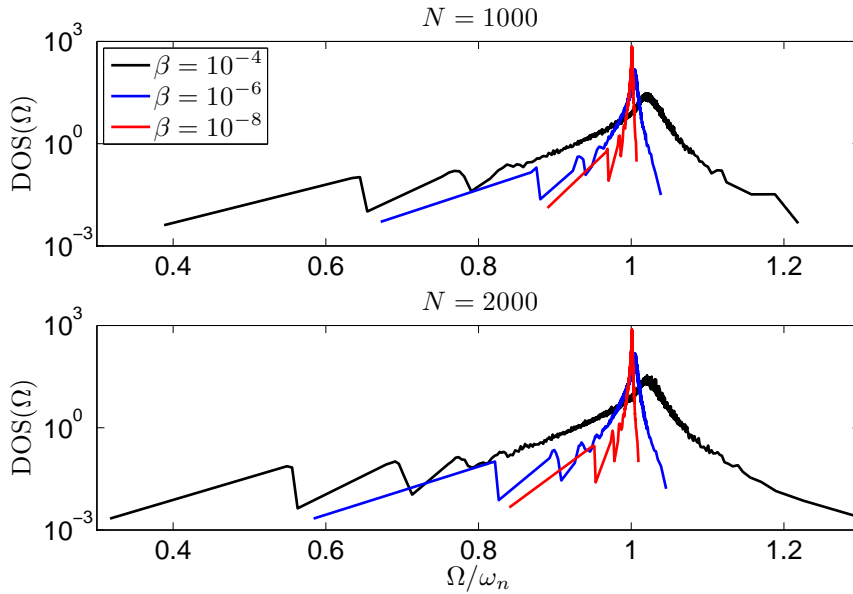


Figura 5.2: Densidad de estados (DOS) de una nube esférica monodispersa, para distintos valores de N y fracción de vacío β . La nube está formada por burbujas de tamaño $R_o = 3 \mu\text{m}$, distribuidas de forma homogénea y aleatoria.

En la Fig. 5.3 se representan algunos de los modos colectivos obtenidos a partir de la solución numérica promediada del problema de autovalores para una nube esférica monodispersa. Como vemos, el primer modo está asociado a una respuesta dinámica de patrón monopolar, en el cual todas las burbujas oscilan en fase, alcanzando sus máximas oscilaciones en el centro de la nube. Los siguientes tres modos están asociados a patrones dipolares, cada uno orientado según las tres direcciones principales del sistema. En estos patrones, las burbujas oscilan completamente fuera de fase en cada hemisferio, los cuales quedan divididos por un plano nodal en donde las oscilaciones son mínimas. A medida que los modos van aumentando de frecuencia, la respuesta dinámica de la nube seguirá unos patrones cada vez más complejos (cuadrupolos, sextupolos, monopolos y dipolos de segundo orden, etc). Estos patrones poseen numerosas superficies nodales, lo que hace que la fase de las oscilaciones sufra grandes variaciones espaciales. En el rango $\Omega \geq \omega_n$, como se expuso en el caso simplificado, tendremos por tanto configuraciones en las que burbujas vecinas cada vez más próximas oscilan completamente fuera de fase.

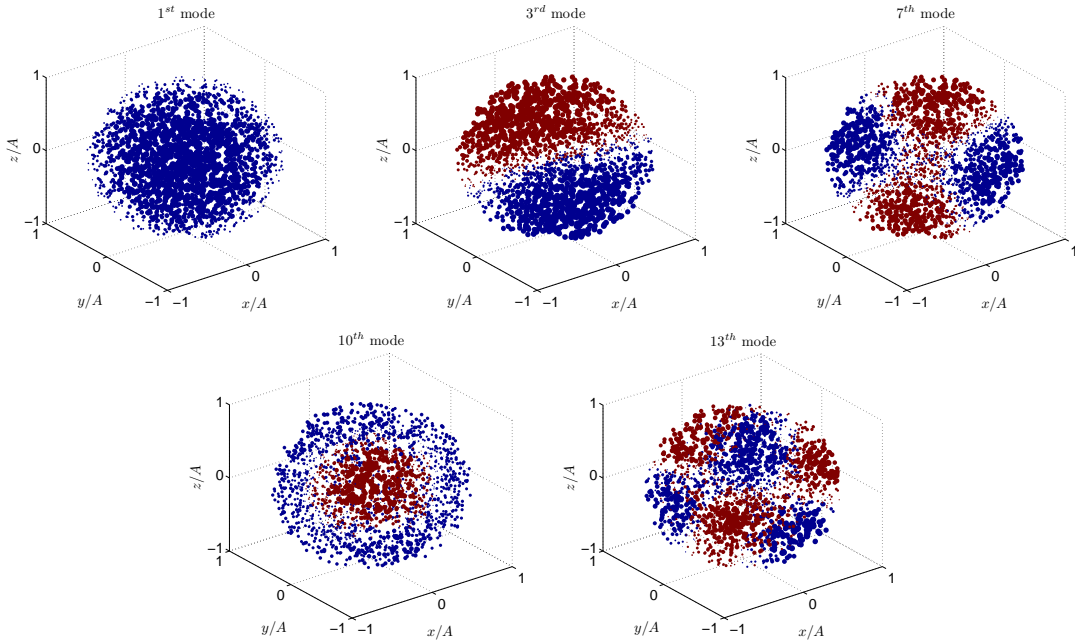


Figura 5.3: Distintos modos de oscilaciones colectivas para una nube esférica monodispersa, con una población de $N = 2000$ burbujas de tamaño $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias naturales correspondientes son: (a) $\Omega_1/\omega_n = 0.317$ (monopolo), (b) $\Omega_3/\omega_n = 0.556$ (dipolo), (c) $\Omega_7/\omega_n = 0.690$ (cuadrupolo), (d) $\Omega_{10}/\omega_n = 0.708$ (monopolo de segundo orden), (e) $\Omega_{13}/\omega_n = 0.767$ (sextupolo). El tamaño de los puntos es proporcional a la amplitud ε_i de las oscilaciones, mientras que el color representa la fase ϕ_i : el azul se corresponde con $\phi_i = 0$ y el rojo con $\phi_i = -\pi$.

Finalmente, en la Fig. 5.4 se aprecia cómo los modos colectivos asociados a un patrón en concreto, se corresponden con unas frecuencias naturales ligeramente distintas. Esto es debido a la naturaleza aleatoria y discreta de nuestro sistema, la cual dota a la nube de direcciones preferentes. Obviamente, si promediásemos la solución para infinitas realizaciones en un sistema con un número de burbujas infinitamente grande, estos grupos de frecuencias naturales colapsarían en el mismo valor, lo cual es coherente con la teoría de los sistemas dinámicos continuos y homogéneos [d'Agostino (1989)].

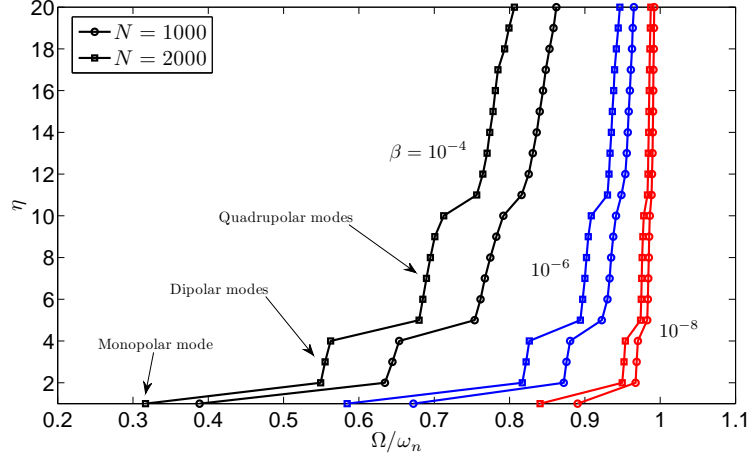


Figura 5.4: Frecuencias naturales de los 20 primeros modos colectivos de una nube esférica con una población monodispersa de burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, para distintas fracciones de vacío.

5.2.2. Oscilaciones colectivas forzadas

El resultado del problema de autovalores no amortiguado para una nube esférica monodispersa nos da una idea de cómo son sus modos propios y frecuencias naturales colectivas. A continuación, resolveremos la dinámica acoplada para este tipo de nubes cuando son excitadas de forma externa por una onda acústica p_a . Para ello, aplicaremos algún algoritmo de inversión estándar sobre el sistema (5.4), hallando finalmente las oscilaciones de cada burbuja considerando todos los efectos de amortiguamiento.

En primer lugar, abordaremos el sistema de ecuaciones de forma numérica asumiendo la hipótesis de medio incompresible. Bajo esta hipótesis, la excitación externa tendrá siempre una longitud de onda mucho más grande que el tamaño de la nube, es decir, $kA \ll 1$. En consecuencia, la población de burbujas estará sometida a un campo acústico externo homogéneo en todo su dominio, por lo que cabe esperar que el resultado de las oscilaciones colectivas posea simetría radial [Omta (1987), d'Agostino (1988)]. Este comportamiento se observa en la Fig. 5.5, donde se ha representado la proyección de las oscilaciones en el plano del ecuador $x - z$ de la nube, para distintas frecuencias de excitación. Como vemos, para frecuencias bajas, la nube oscila siguiendo el patrón monopolar correspondiente a su modo colectivo principal. A medida que aumentamos la frecuencia de excitación, la nube se irá adaptando a la configuración que le marquen los modos superiores poseedores de simetría radial, como el monopolo de segundo orden. Es decir, bajo la hipótesis de incompresibilidad, la nube solamente podrá ser excitada según los modos de esta naturaleza. Observamos que, para frecuencias de excitación generalmente bajas, las oscilaciones en el centro de la nube son siempre mayores que en su contorno debido al alto acoplamiento acústico presente en esta zona [d'Agostino (1988)]. Por el contrario, cuando $\omega_o \geq \omega_n$, se observa un efecto de apantallamiento por parte de las burbujas de la corteza exterior. Estas burbujas, dada su localización, sienten un acoplamiento más débil que el resto, por lo que únicamente responden ante la excitación externa. En este caso, al responder de manera resonante, apantallan a las burbujas del interior, las cuales realizarán oscilaciones con una amplitud mucho más pequeña [Zeravcic (2011)]. No obstante, este efecto se irá disipando a medida que crece la frecuencia de excitación, homogeneizándose finalmente el campo de oscilaciones. Efectiva-

mente, en este límite de alta frecuencia, la respuesta dinámica de las burbujas es muy débil, lo que hace que los efectos de acoplamiento decaigan.

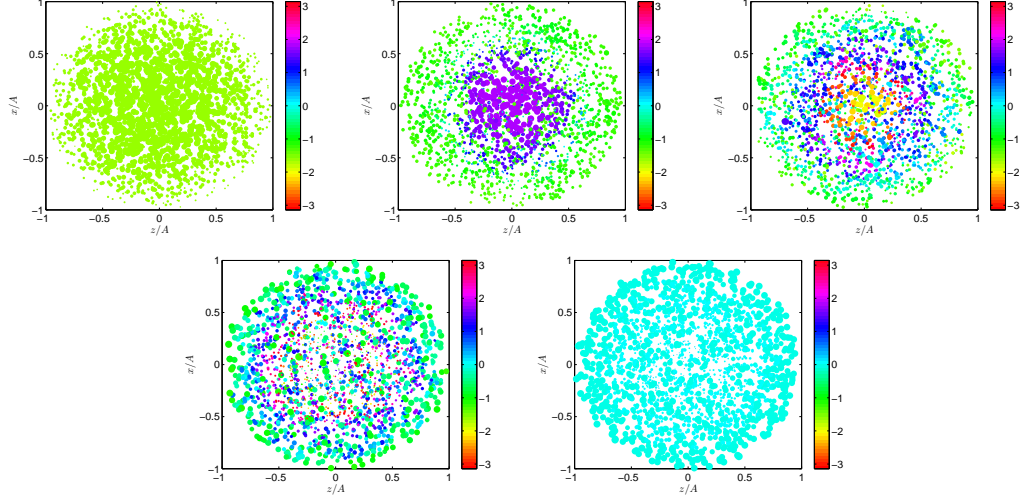


Figura 5.5: Oscilaciones forzadas ($kA \ll 1$) para una nube esférica monodispersa, con una población de $N = 2000$ burbujas de tamaño $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.317$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.708$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.858$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$. El tamaño de los puntos es proporcional a la amplitud de las oscilaciones ε_i , mientras que la barra de color representa el valor de ϕ_i .

Sin embargo, las excitaciones reales a las que están sometidas las nubes de burbujas no tienen por qué tener longitudes de onda infinitamente grandes, sobre todo si el medio por el que se propagan posee cierta compresibilidad (la velocidad del sonido en el agua es $c_\infty \simeq 1500 \text{ m/s}$). Esto implica que los efectos de retardo en la propagación de las ondas a través del seno de la nube tiene una importante influencia en la configuración final del campo de oscilaciones [Fuster (2011)]. Así pues, mostraremos a continuación este efecto sobre la dinámica de la nube, considerando para ello un parámetro kA arbitrariamente grande. Como es de esperar, el hecho de que la presión acústica sobre la nube ya no sea espacialmente homogénea rompe la simetría radial de las oscilaciones colectivas. Esto hace que se exciten modos colectivos con patrones más complejos, cuya superposición dará lugar al campo de oscilaciones final. No obstante, la configuración espacial de la onda plana, junto con la simetría esférica de la nube, hace que solamente se vean excitados los modos con naturaleza axilsimétrica, como se observa en la Fig. 5.6. Para bajas frecuencias de excitación, vemos que las oscilaciones de mayor amplitud tienden a situarse en el extremo trasero de la nube. Esto se debe al efecto lente sobre el frente de ondas provocado por la disminución de la velocidad del sonido efectiva dentro de la nube (ver Sec. 5.3.2). Este fenómeno hace que la onda externa tienda a enfocarse en esta región, elevando en consecuencia la presión local [Parrales (2011)]. Sin embargo, para frecuencias cercanas y superiores a ω_n , aparece de nuevo el efecto de apantallamiento por parte de las burbujas situadas en el extremo frontal de la nube. Dado que en estas condiciones la longitud de onda de la excitación es finita, los efectos de difracción hacen que las burbujas localizadas en los laterales y en el extremo trasero se encuentren excitadas de una forma más débil.

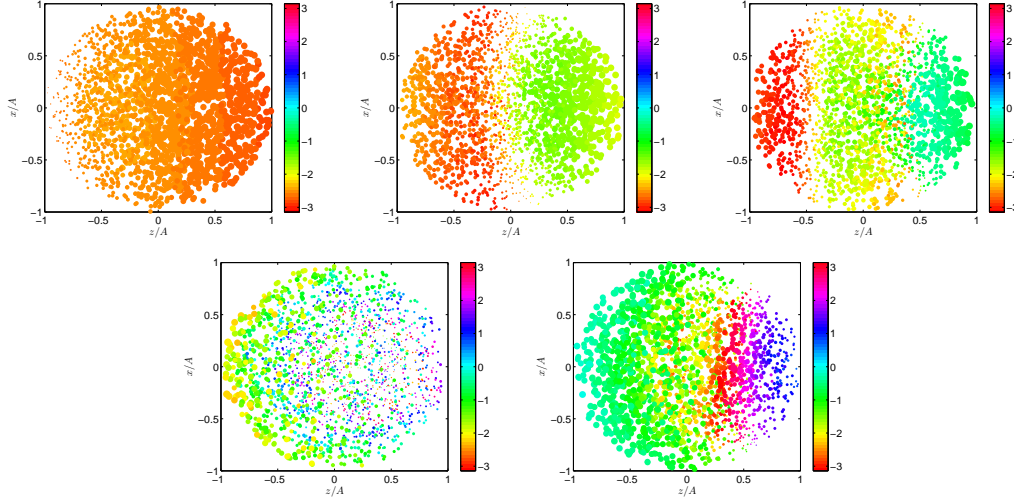


Figura 5.6: Oscilaciones forzadas para una nube esférica monodispersa, con una población de $N = 2000$ burbujas de tamaño $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación y valores de kA correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.262$ y $kA = 0.945$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.448$ y $kA = 1.617$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.600$ y $kA = 2.154$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $kA = 3.608$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$ y $kA = 7.217$. El tamaño de los puntos es proporcional a la amplitud de las oscilaciones ε_i , mientras que la barra de color representa el valor de ϕ_i .

5.2.3. Aproximación de medio continuo

El sistema de ecuaciones lineales que modelan las oscilaciones de la nube de burbujas puede ser resuelto de manera aproximada a través del establecimiento de la hipótesis de medio continuo, la cual dota a la mezcla bifásica de unas propiedades efectivas [Foldy (1945), Wijngaarden (1968), Caffisch (1985), Commander (1989)]. En primer lugar, para que esta hipótesis tenga validez, la separación media entre las burbujas debe ser mucho más pequeña que el tamaño de la nube, $\bar{l} \ll A$, lo que implica una población $N^{1/3} \gg 1$. Esto impone una población mínima de burbujas de $N \sim 1000$. Por otro lado, se requiere una fracción de vacío β lo suficientemente elevada para que la separación media entre burbujas sea mucho menor que la longitud de onda de la excitación, lo que implica que $k\bar{l} \ll 1$. Esto hace que la relación entre el número de onda y el tamaño de la nube sea $kA \ll N^{1/3}$, o análogamente, que $\beta \gg (kR_o)^3$, donde asumimos que $kR_o \ll 1$ con el fin de preservar la condición de simetría radial en las oscilaciones de las burbujas [d'Agostino (1988)].

A continuación, y bajo las anteriores condiciones, transformaremos el sistema discreto (5.3) en una expresión continua para el campo de oscilaciones $\hat{X}(\mathbf{r})$ considerando una distribución de burbujas representada por una densidad numérica $\delta = N/V_c$ homogénea. Nótese que esta densidad se relaciona con la fracción de vacío a través de $\delta = 3\beta/4\pi R_o^3$. Asumiendo una población monodispersa, tendremos

$$\hat{X}(\mathbf{r}) = \frac{-f_s e^{-ikz}}{\rho_\infty \omega_o^2 R_o^3} \left[P_a e^{ikz} + \xi(\mathbf{r}) \right], \quad (5.13)$$

donde f_s es la función de dispersión definida por $f_s = R_o[(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma]^{-1}$. La función $\xi(\mathbf{r})$ representa entonces la presión acústica total en el punto \mathbf{r} debida a la superposición de las ondas dispersadas por todas las burbujas de la nube. Por tanto, este campo

de presiones se puede escribir como $\xi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_o^3 \delta \int_{V_c} \hat{X}(\mathbf{r}') \exp(ikz') G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau'$, siendo $d\tau' = r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' d\phi'$ un elemento de volumen. La función $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ es la conocida función de Green para la ecuación de Helmholtz tridimensional [Williams (1999)], la cual viene dada por

$$G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (5.14)$$

con $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$. Efectivamente, se observa cómo las oscilaciones \hat{X} de las burbujas actúan como una distribución de fuentes activas de emisión acústica. De esta manera, substituyendo la expresión continua para este campo de oscilaciones, obtenemos

$$\xi(\mathbf{r}) = 4\pi\delta f_s \int_{V_c} \left[P_a e^{ikz'} + \xi(\mathbf{r}') \right] G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau'. \quad (5.15)$$

El hecho de que la distribución de fuentes acústicas dependan del valor del campo de presiones, hace que la resolución de esta integral sea inabordable de forma exacta, siendo necesario un número infinito de sustituciones sucesivas para su cómputo. Como veremos en la Sec. 5.3.2, cada iteración incrementa en un orden la complejidad del acoplamiento acústico entre las burbujas, tomándose en consideración cadenas de dispersión cada vez con más lazos cerrados [Feuillade (1996), Henyey (1999)]. No obstante, para una densidad δ moderada y excitaciones alejadas de la frecuencia natural ω_n , podemos establecer que las burbujas solamente se ven involucradas en una ocasión dentro de una cadena de dispersión múltiple [Commander (1989)]. Esto nos indica que el acoplamiento libre de lazos ofrece una buena aproximación para el cálculo de $\xi(\mathbf{r})$.

Asumiendo esta hipótesis, el campo de presiones dado por (5.15) cumplirá la ecuación de Helmholtz no homogénea $\nabla^2 \xi + k^2 \xi = -4\pi\delta f_s [P_a \exp(ikz) + \xi]$. Si llamamos ξ_e a la presión total resultante evaluada en los puntos interiores de la nube, y ξ_o a la presión evaluada en el exterior, establecemos finalmente que

$$\nabla^2 \xi_e + k_e^2 \xi_e = -4\pi\delta f_s P_a e^{ikz} \quad \text{para } r \leq A, \quad (5.16)$$

$$\nabla^2 \xi_o + k^2 \xi_o = 0 \quad \text{para } r \geq A, \quad (5.17)$$

donde k_e es el conocido número de onda efectivo encontrado por Foldy, el cual viene dado por $k_e^2 = k^2 + 4\pi\delta f_s$ [Foldy (1945)]. Las ecuaciones (5.16) y (5.17) deben resolverse junto a las condiciones de continuidad en presiones y velocidades normales en el contorno de la nube, es decir [Omta (1987), d'Agostino (1989)],

$$\xi_e|_{r=A} = \xi_o|_{r=A}, \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \xi_e}{\partial r} \Big|_{r=A} = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \xi_o}{\partial r} \Big|_{r=A}, \quad (5.19)$$

donde ρ_e es la densidad másica efectiva de la nube [Wijngaarden (1968)], la cual se define en función de la fracción de vacío como $\rho_e = (1 - \beta)\rho_\infty + \beta\rho_g$, siendo ρ_g la densidad del gas que compone las burbujas. Nótese que, para pequeños valores de β , es común aproximar $\rho_e \simeq (1 - \beta)\rho_\infty$, dado que $\rho_g \ll \rho_\infty$.

Si tenemos en cuenta que el término inhomogéneo de la ecuación (5.16) es axil-simétrico, podemos obviar la dependencia con el ángulo azimutal del campo de presiones

resultante. De esta manera, la solución podrá ser expresadas en términos de funciones de Bessel esféricas y polinomios de Legendre como

$$\xi_e = -P_a e^{ikz} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_e r) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r \leq A, \quad (5.20)$$

$$\xi_o = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r \geq A, \quad (5.21)$$

donde se ha tenido en cuenta que el campo de presiones en el interior de la nube debe ser regular en el origen, mientras que en el exterior se debe cumplir la condición de radiación de Sommerfeld en el infinito. Los coeficientes B_n y C_n podrán ser calculados evaluando las condiciones de contorno planteadas en (5.18) y (5.19). Efectivamente, considerando que el término de onda plana en la expresión (5.20) puede expandirse como $P_a \exp(ikz) = \sum_{n=0}^{\infty} P_a i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta)$, obtenemos [Williams (1999)]

$$B_n = \frac{P_a i^n (2n+1) [k j_n'(kA) h_n^{(1)}(kA) - (1-\beta) k j_n(kA) h_n^{(1)'}(kA)]}{k_e j_n'(k_e A) h_n^{(1)}(kA) - (1-\beta) k j_n(k_e A) h_n^{(1)'}(kA)}, \quad (5.22)$$

$$C_n = \frac{P_a i^n (2n+1) [k j_n'(kA) j_n(k_e A) - k_e j_n(kA) j_n'(k_e A)]}{k_e j_n'(k_e A) h_n^{(1)}(kA) - (1-\beta) k j_n(k_e A) h_n^{(1)'}(kA)}. \quad (5.23)$$

Dado que el campo de oscilaciones solamente está definido en la región interior de la nube, podemos construir nuestra solución aproximada introduciendo (5.20) en la expresión continua (5.13), de manera que

$$\hat{X}(\mathbf{r}) = \frac{f_s e^{-ikz}}{\rho_{\infty} \omega_o^2 R_o^3} \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_e r) P_n(\cos \theta). \quad (5.24)$$

Esta expresión constituye una solución analítica para el campo de oscilaciones en una nube esférica excitada por una onda plana monocromática. Como se ha visto, esta aproximación será válida en las condiciones para las cuales la nube de burbujas cumple la hipótesis de medio continuo [d'Agostino (1989)]. Por otro lado, cuanto mayor densidad de burbujas posea la nube, y cuanto más cercana a ω_n sea la excitación [Commander (1989)], la precisión de esta solución disminuirá como consecuencia del incremento de los fenómenos dispersión múltiple de órdenes superiores [Henyey (1999)].

5.2.4. Campos de oscilaciones resonantes

Como se desprende de la expresión para el campo de oscilaciones de la nube, las frecuencias de los modos colectivos se pueden calcular si hacemos

$$\zeta_n = k_e j_n'(k_e A) h_n^{(1)}(kA) - (1-\beta) k j_n(k_e A) h_n^{(1)'}(kA) = 0. \quad (5.25)$$

Dada la naturaleza de ζ_n , estas frecuencias resultan generalmente complejas, por lo que escribimos $\omega_o = \text{Re } \omega_o - i \text{Im } \omega_o$. Como ya se ha comentado, la parte real del polo indicará la frecuencia de resonancia asociada al modo colectivo, mientras que su parte imaginaria se relaciona con el factor de amortiguamiento [Hahn (2007)]. En la Fig. 5.7 se han representado los polos de la función ζ_n asumiendo la hipótesis de medio incompresible, y un amortiguamiento nulo. Estas dos últimas condiciones hacen, por

tanto, que la parte imaginaria de los polos sea siempre nula. Para cada valor de n , recuperamos las frecuencias Ω_n^m correspondientes a los modos con patrones monopulares ($n = 0$), dipolares ($n = 1$) y cuadrupolares ($n = 2$), las cuales coinciden con los resultados numéricos del problema de autovalores expuestos en la Fig. 5.3 y Fig. 5.4.

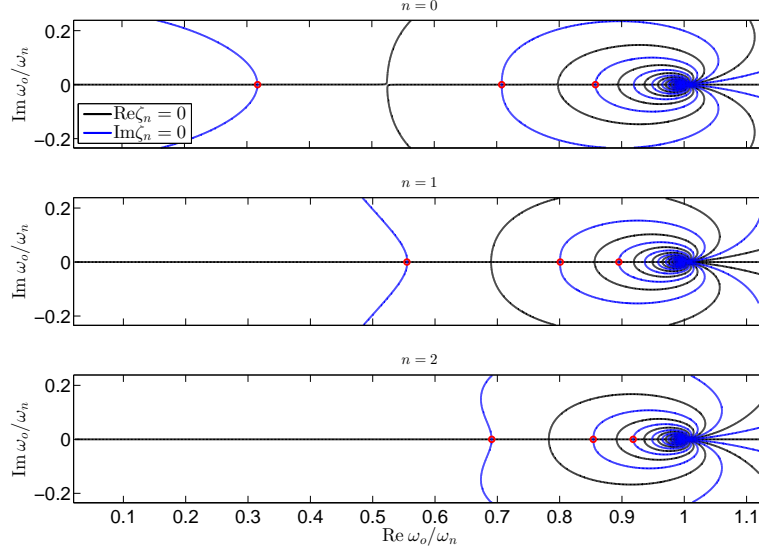


Figura 5.7: Polos (círculos rojos) correspondientes a varios modos de oscilaciones colectivas para una nube esférica monodispersa, con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío $\beta = 10^{-4}$. Se ha asumido la hipótesis de medio incompresible y amortiguamiento nulo.

Tal y como hicimos en la Sec. 5.2.2, calcularemos a continuación el campo de oscilaciones de una nube mientras es excitada por una onda externa bajo la hipótesis de medio incompresible, teniendo en cuenta los efectos de amortiguamiento. Debido a que las longitudes de onda de la excitación son infinitamente largas, la nube responderá oscilando con simetría radial, por lo que solamente se conserva el término monopolar de la solución analítica. Así pues, estableciendo un valor $kA \ll 1$, podremos aproximar

$$\hat{X}(r) = \frac{-f_s}{\rho_\infty \omega_o^2 R_o^3} \left[\frac{P_a(1-\beta)}{k_e A j_0'(k_e A) + (1-\beta)j_0(k_e A)} \right] j_0(k_e r), \quad (5.26)$$

siendo el número de onda efectivo, en este límite, $k_e \simeq (4\pi\delta f_s)^{1/2}$. Esta solución se corresponde de forma exacta con la encontrada por d'Agostino y Brennen tras analizar la dinámica lineal de flujos bifásicos sometidos a excitaciones acústicas espacialmente homogéneas [d'Agostino (1989)]. En la Fig. 5.8 y Fig. 5.9 se muestra la configuración del campo de oscilaciones predicha por esta aproximación analítica. A pesar del amortiguamiento, las frecuencias de resonancia colectivas de la nube, excitada bajo las condiciones expuestas, se corresponden prácticamente con las obtenidas previamente para $n = 0$. A la vista de la expresión (5.26), estas frecuencias se pueden calcular analíticamente haciendo $k_e A j_0'(k_e A) + (1-\beta)j_0(k_e A) = 0$. Efectivamente, para valores de la fracción de vacío lo suficientemente pequeños, encontramos que $k_e A = (2m+1)\pi/2$. Por tanto,

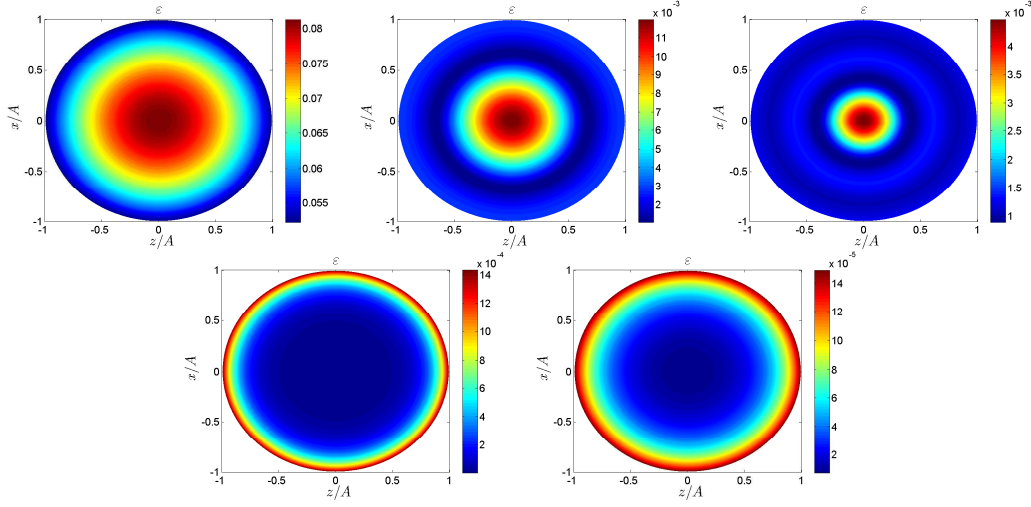


Figura 5.8: Amplitud $|\hat{X}| = \varepsilon$ del campo de oscilaciones resonantes ($kA \ll 1$) para una nube esférica monodispersa con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío de $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.317$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.708$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.858$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$.

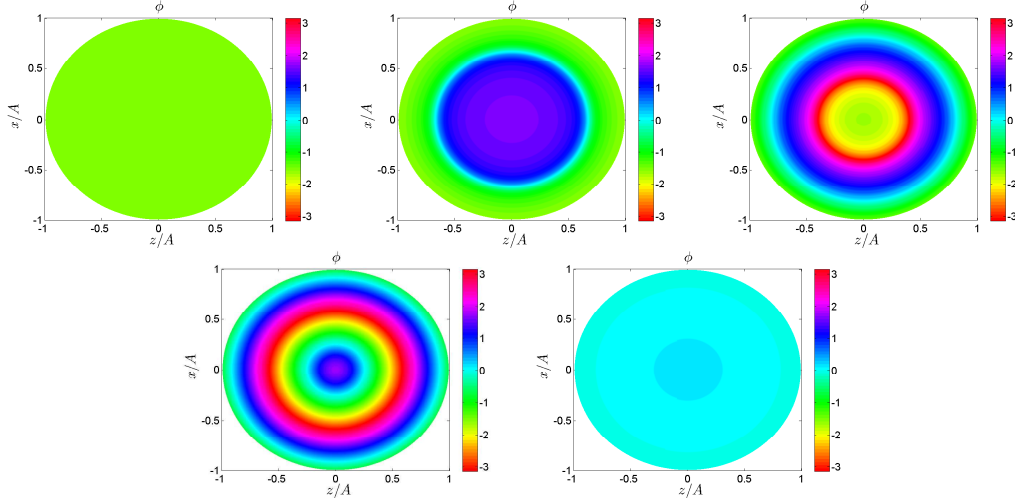


Figura 5.9: Fase ϕ del campo de oscilaciones resonantes ($kA \ll 1$) para una nube esférica monodispersa con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío de $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.317$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.708$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.858$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$.

asumiendo un amortiguamiento despreciable, llegamos a

$$\Omega_0^m \simeq \omega_n \left[1 + \frac{12\beta A^2}{(2m+1)^2 \pi^2 R_o^2} \right]^{-1/2}, \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.27)$$

Se comprueba que, a medida que aumentamos el orden del modo colectivo, las frecuencias resultantes se van aproximando a la frecuencia natural de las burbujas. En la Fig. 5.10 se representa el campo radial de las oscilaciones para los tres primeros modos. Como se desprende de la expresión (5.27), a medida que la nube se diluye, las frecuencias colectivas tienden a ω_n debido al cada vez más débil acoplamiento dinámico. Esto hace

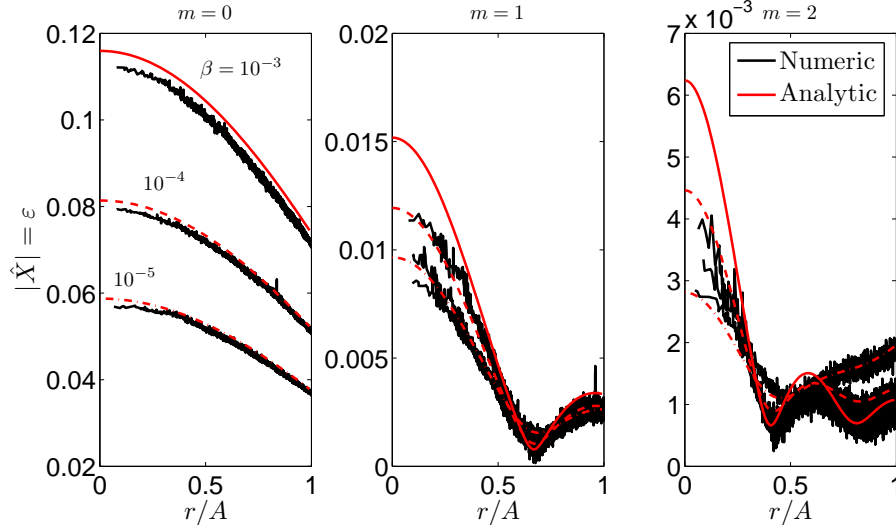


Figura 5.10: Comportamiento resonante de una nube esférica monodispersa bajo la hipótesis de medio incompresible. Perfil radial de la amplitud del campo de oscilaciones forzadas de una nube con $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$ para distintas fracciones de vacío. La nube está excitada según sus frecuencias colectivas, es decir, $\omega_o = \Omega_0^m$.

que las máximas oscilaciones de la nube posean unas amplitudes cada vez más pequeñas. Por otro lado, cabe destacar el hecho de que $k_e A$ sea siempre mayor que la unidad para los modos colectivos. Aunque la fase líquida se haya asumido incompresible, la presencia de las burbujas incorpora cierta compresibilidad al medio interior de la nube, haciendo que las longitudes de onda sean finitas dentro de esta región. Es este efecto, por tanto, el que dota de variabilidad espacial a la configuración de las oscilaciones resonantes dentro de la nube. Finalmente, la frecuencia colectiva fundamental de la nube viene dada, de forma aproximada, por $\Omega_0^0 \simeq \omega_n (\pi^2 R_o^2 / 12 \beta A^2)^{1/2}$ [d'Agostino (1989)]. Si usamos la fórmula de Minnaert, podemos substituir el valor de la frecuencia natural de la burbuja por $\omega_n = (3\gamma p_\infty / \rho_\infty R_o^2)^{1/2}$, de manera que

$$\Omega_0^0 \simeq \left(\frac{3\pi^2 \gamma p_\infty}{12 \rho_\infty \beta A^2} \right)^{1/2}. \quad (5.28)$$

Es decir, la frecuencia colectiva fundamental de una nube esférica será la correspondiente a la frecuencia natural de una burbuja de radio A , inmersa en un medio con una densidad másica $\rho_\infty \beta$, la cual está formada por un gas cuyo coeficiente adiabático es aproximadamente 0.82γ [Omta (1987), Yoon (1991), Roy (1992)].

Por último, representaremos el campo de oscilaciones de la nube asumiendo excitaciones con longitudes de ondas finitas. Para ello, hemos obtenido en primer lugar las frecuencias de resonancia colectivas bajo estas condiciones, las cuales se representan en la Fig. 5.11. Como se observa, los polos resultantes tienen una importante componente imaginaria, lo que indica la existencia de pérdidas por disipación y por reradiación acústica durante las oscilaciones de los modos propios. Por otro lado, comprobamos que las frecuencias colectivas correspondientes a cada modo se dan para valores algo inferiores con respecto a aquellos calculados bajo la hipótesis de medio incompresible. En cuanto a la configuración del campo de oscilaciones, se observa en la Fig. 5.12 y Fig. 5.13 la axilsimetría de los modos resonantes, en contraste con la simetría radial

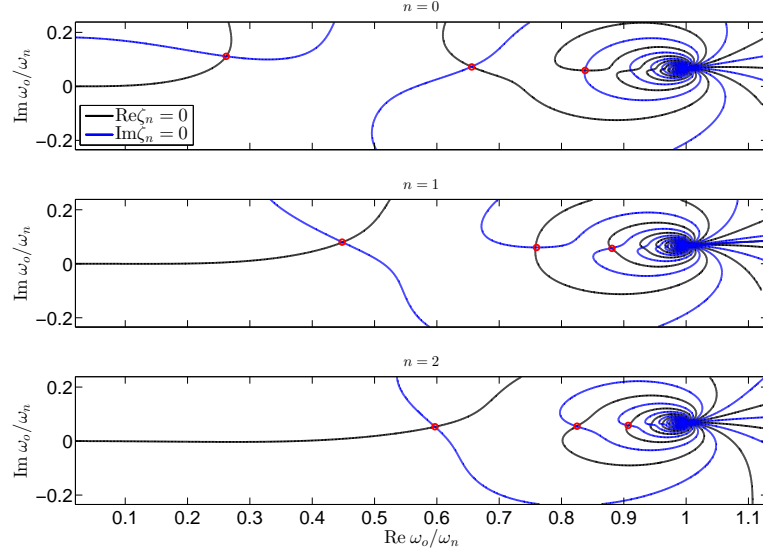


Figura 5.11: Polos (círculo rojo) correspondientes a varios modos de oscilaciones colectivas para una nube esférica monodispersa, con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío $\beta = 10^{-4}$. La velocidad del sonido en el medio es de $c_\infty = 1500 \text{ m/s}$.

que poseían aquellos correspondientes al límite $kA \ll 1$. Ambas configuraciones, para las distintas frecuencias de excitación, coinciden con lo calculado numéricamente en la Sec. 5.2.2, lo cual está expuesto en la Fig. 5.5 y Fig. 5.6 respectivamente. Los posibles errores y divergencias que aparecen en la comparación entre la solución analítica y la numérica (véase la Fig. 5.10) se deben a la consideración únicamente de fenómenos de acoplamiento libre de lazos en la aproximación de medio continuo. Así pues, cuanto mayor sea la fracción de vacío de la nube, y cuanto más cercana a ω_n esté excitada, menor precisión tendrá esta solución.

Como veremos en la Sec. 5.3, la configuración de los modos resonantes, su localización en el espectro de frecuencias, y la amplitud de las oscilaciones colectivas asociadas, tienen una relación directa con las características de la dispersión acústica total por una nube de burbujas [Omta (1987), d’Agostino (1988)]. Los efectos de compresibilidad juegan un papel clave a la hora de analizar la propagación real de las ondas acústicas a través de este tipo de nubes. Como se ha visto, el hecho de que las longitudes de ondas de la excitación sean finitas hace que las resonancias colectivas se produzcan a distintas frecuencias, con unas configuraciones diferentes para el campo de oscilaciones [Hahn (2007)]. En definitiva, bajo estas consideraciones, aparecen una variedad de fenómenos ondulatorios que completan el análisis clásico de la dispersión acústica por nubes de burbujas, basado generalmente en la hipótesis de medio incompresible.

5.3. Dispersión múltiple en nubes de burbujas

A continuación, analizaremos el fenómeno de dispersión acústica que se genera cuando una excitación externa p_a incide sobre una nube compuesta por N burbujas. Como hemos visto en el análisis de la dinámica acoplada, las oscilaciones de las burbujas influyen en la dinámica de sus vecinas a través de la emisión de ondas debido a los

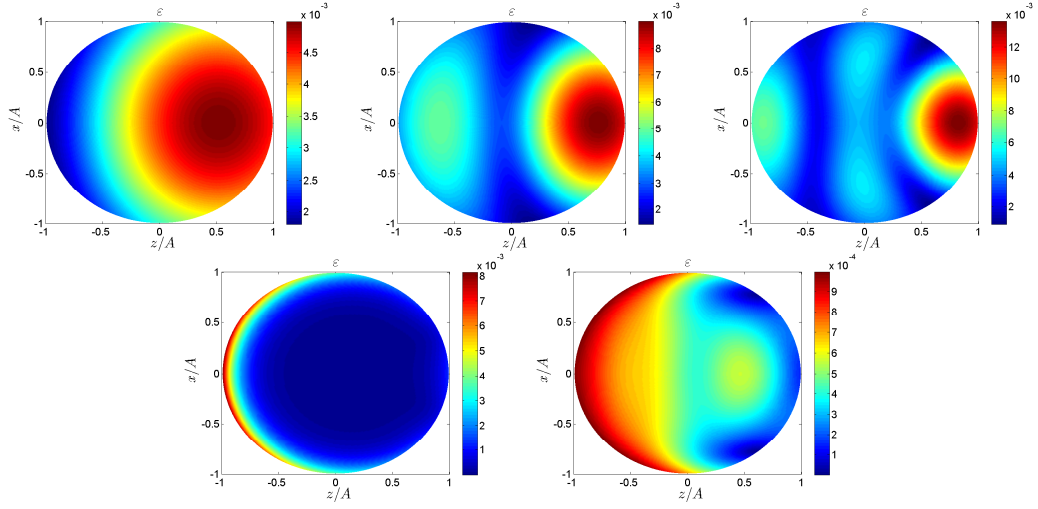


Figura 5.12: Amplitud $|\hat{X}| = \varepsilon$ del campo de oscilaciones resonantes para una nube esférica monodispersa con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío de $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación y valores de kA correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.262$ y $kA = 0.945$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.448$ y $kA = 1.617$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.600$ y $kA = 2.154$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $kA = 3.608$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$ y $kA = 7.217$.

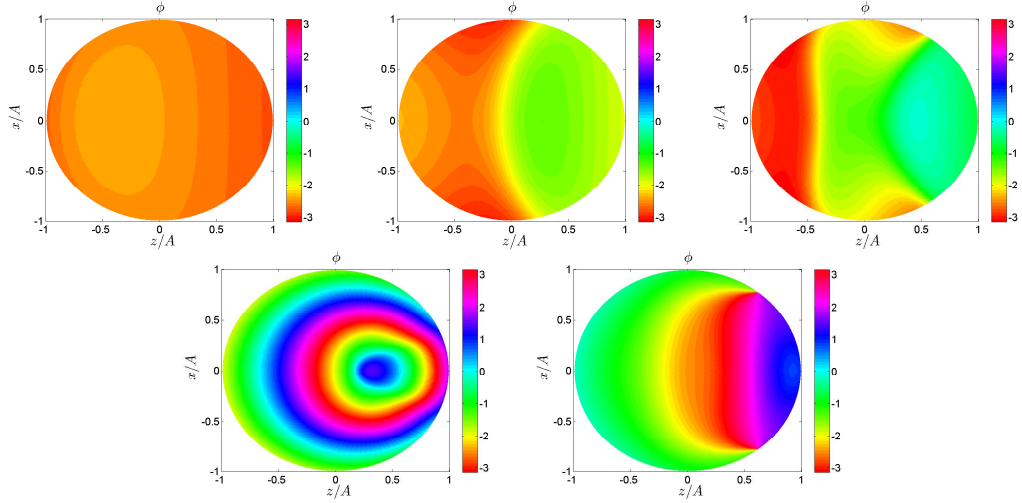


Figura 5.13: Fase ϕ del campo de oscilaciones resonantes para una nube esférica monodispersa con una población de $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$, y una fracción de vacío de $\beta = 10^{-4}$. Las frecuencias de excitación y valores de kA correspondientes son (a) $\omega_o/\omega_n = 0.262$ y $kA = 0.945$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.448$ y $kA = 1.617$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.600$ y $kA = 2.154$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $kA = 3.608$, (e) $\omega_o/\omega_n = 2$ y $kA = 7.217$.

mecanismos de reradiación. De esta manera, dado que la onda dispersada por una burbuja es susceptible de ser dispersada de nuevo por las demás, podemos decir que en el seno de la nube existirá dispersión múltiple (*multiple scattering*). Como veremos, el número de veces que una onda es reradiada de forma concatenada está relacionado con el orden de acoplamiento acústico de la nube. Obviamente, la onda total que dispersa la nube será, por linealidad, la suma de las ondas dispersadas por cada burbuja, es decir $p_s = \sum_{i=1}^N p_{si}$.

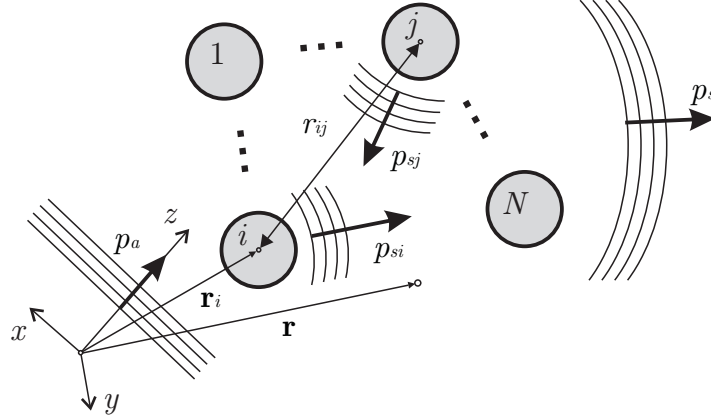


Figura 5.14: Esquema de los fenómenos de dispersión múltiple en nubes de burbujas. Una onda plana, la cual se propaga a lo largo del eje z , incide sobre las burbujas provocando una dispersión acústica total dada por p_s . La posición de las burbujas, localizadas aleatoriamente en el espacio, viene dada por el vector \mathbf{r}_i .

Según los análisis clásicos la teoría de dispersión múltiple [Foldy (1945), Lax (1951), Twersky (1962)], podemos establecer que la onda dispersada por la burbuja i será consecuencia de la incidencia tanto de la onda externa p_a , como de la onda que dispersa a su vez la burbuja j , siendo $j = 1, \dots, N$, con $j \neq i$. Así pues, si tenemos que $p_a = P_a \exp(ikz) \exp(-i\omega_0 t)$, la presión de la onda dispersada por la burbuja i se podrá escribir como $p_{si} = \hat{p}_{si} \exp(ikz_i) \exp(-i\omega_0 t)$, por lo que obtenemos

$$\hat{p}_{si}(\mathbf{r}) = f_{si} e^{-ikz_i} \left(P_a e^{ikz_i} + \xi_i \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}, \quad (5.29)$$

donde se ha hecho uso de la expresión para la presión emitida por una burbuja, la cual actúa como una fuente acústica monopolar debido a sus oscilaciones radiales [Leighton (1994)]. Como vemos, esta expresión considera la excitación de las ondas dispersadas por el resto de burbujas a través de $\xi_i = \sum_{j \neq i}^N \hat{p}_{sj}(\mathbf{r}_i) e^{ikz_j}$. Este término, definido en la Sec. 5.2.3 en su forma continua, representa entonces la presión acústica total dispersada sobre la burbuja i . Por tanto, por construcción, tenemos que

$$\xi_i = \sum_{j \neq i}^N f_{sj} \left(P_a e^{ikz_j} + \xi_j \right) \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}}, \quad (5.30)$$

expresión que constituye un sistema lineal de N ecuaciones para el cómputo de las presiones ξ_i [Feuillade (1995), Skaropoulos (2003), Hahn (2007)]. Nótese que esta ecuación es la contrapartida discreta de la expresión continua dada por (5.15). En notación matricial, el sistema (5.30) se puede escribir como

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Pi} + \boldsymbol{\xi}), \quad (5.31)$$

donde $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_N]$ es el vector de presiones y $\mathbf{\Pi} = P_a [\exp(ikz_1), \dots, \exp(ikz_N)]$ el vector de excitación externa. La matriz de acoplamiento $\mathbf{\Lambda}$ será aquella definida por

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ f_{sj} \frac{e^{ikr_{ij}}}{r_{ij}} & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.32)$$

la cual es simétrica solamente para el caso de poblaciones monodispersas de burbujas. Si reescribimos la expresión matricial (5.31) como $(\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\Pi}$, con \mathbf{I} la matriz identidad, podremos obtener el vector de presiones aplicando simplemente algún algoritmo de inversión estándar. Una vez obtenidos las presiones ξ_i , se podrá computar la onda que dispersa cada burbuja de forma individual a través de la expresión (5.29). Esta formulación permite calcular, por tanto, la onda total dispersada por la nube de forma numérica y exacta, considerando todos los órdenes de dispersión múltiple originada por el acoplamiento acústico entre las burbujas. Así pues, si asumimos que $p_s = \hat{p}_s \exp(-i\omega_o t)$, se escribe finalmente

$$\hat{p}_s(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \hat{p}_{si}(\mathbf{r}) e^{ikz_i} = \sum_{i=1}^N f_{si} \left(P_a e^{ikz_i} + \xi_i \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}, \quad (5.33)$$

expresión que nos permite evaluar la presión acústica dispersada en cualquier punto del dominio interior y exterior a la nube de burbujas.

Una vez hallado el campo que define a la onda dispersada, podemos construir el campo de presión total \hat{p} como la superposición entre \hat{p}_s y la onda plana externa, es decir

$$\hat{p}(\mathbf{r}) = P_a e^{ikz} + \sum_{i=1}^N f_{si} \left(P_a e^{ikz_i} + \xi_i \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}. \quad (5.34)$$

De esta manera, seremos capaces de obtener la presión acústica total en cada punto del dominio. Esto nos permitirá determinar finalmente las características de la propagación del frente de ondas a través de la nube de burbujas, lo cual será expuesto en la Sec. 5.4

5.3.1. Sección eficaz de dispersión

El objetivo de nuestro análisis será caracterizar las propiedades de la dispersión acústica que produce una nube de burbujas cuando es excitada por una onda plana externa p_a . A partir de esta caracterización, podremos diferenciar los diferentes regímenes de dispersión de la nube, conectándolos con los resultados para el comportamiento de las oscilaciones colectivas. Así pues, calcularemos la sección eficaz de dispersión de la nube a través de su definición $\Sigma_s = \int_{\Omega} r^2 (I_s/I_a) d\Omega$, donde r es la distancia al centro de la nube, y $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido. En este caso $I_s = |\hat{p}_s|^2/2\rho_{\infty}c_{\infty}$ es la intensidad de la onda total dispersada evaluada en el campo lejano de la nube, y $I_a = P_a^2/2\rho_{\infty}c_{\infty}$ es la intensidad de la onda incidente. Para distancias mucho mayores que el tamaño de la nube, podemos aproximar $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| \simeq r - \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_r$, siendo \mathbf{u}_r el versor en la dirección de \mathbf{r} . De esta manera, se puede escribir la onda dispersada como

$$\hat{p}_s = P_a F_s \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5.35)$$

donde F_s representa la función de dispersión de la nube en analogía con la formulación hecha para una burbuja aislada [Leighton (1994)]. Observamos entonces que la onda total dispersada se propaga como una onda esférica, cuya amplitud está modulada según el patrón de directividad marcado por F_s . Esta función de dispersión se escribe

$$F_s = \sum_{i=1}^N f_{si} \left[e^{ikz_i} + \xi_i/P_a \right] e^{-ik\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_r}. \quad (5.36)$$

Para nubes homogéneas con geometría esférica, y debido a la axilsimetría de la onda de excitación externa, podemos considerar que la función F_s solamente depende, a efectos prácticos, del ángulo polar θ , el cual marca la dirección $\mathbf{u}_r = [\sin \theta, 0, \cos \theta]$ en el plano $x - z$. Por tanto, el cálculo de la sección eficaz de dispersión de la nube resulta

$$\Sigma_s = \int_{\Omega} |F_s(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \left| \sum_{i=1}^N f_{si} \left[e^{ikz_i} + \xi_i/P_a \right] e^{-ik\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}_r} \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.37)$$

A continuación mostramos los resultados obtenidos para la sección eficaz de dispersión de nubes esféricas monodispersas. Las burbujas, dentro del volumen de la nube, están dispuestas homogéneamente de forma aleatoria. Una vez conocidas sus posiciones a través del vector \mathbf{r}_i , se ha calculado numéricamente el vector de presiones ξ_i para un amplio espectro de frecuencias de excitación. De esta manera, se puede construir la función de dispersión F_s para cada valor de la frecuencia, la cual integraremos para obtener el espectro de Σ_s . Este algoritmo se repetirá para 20 realizaciones aleatorias distintas, mostrando finalmente el resultado promediado para la sección eficaz de dispersión.

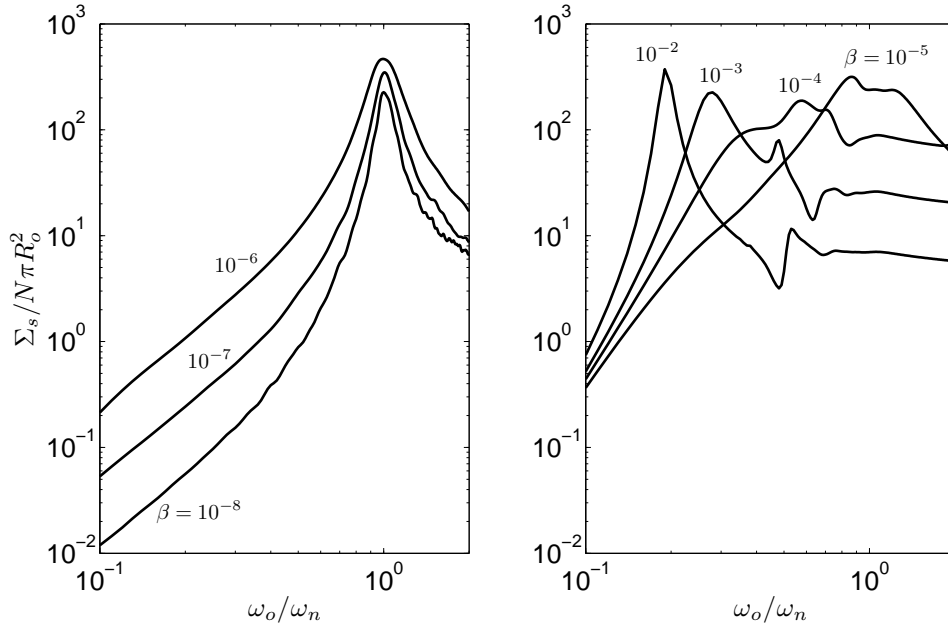


Figura 5.15: Espectro de la sección eficaz de dispersión $\Sigma_s/N\pi R_o^2$, producida por una nube de $N = 1000$ burbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$, para distintas fracciones de vacío β .

En la Fig. 5.15 y Fig. 5.16 se muestra el valor normalizado de Σ_s para una nube con distintas fracciones de vacío. Se observa que la localización y ocurrencia de los máximos de dispersión acústica en el espectro dependen fuertemente del valor de β . Como podemos comprobar, existen dos regímenes bien diferenciados para el comportamiento de la dispersión total. En primer lugar, para fracciones de vacío $\beta \ll 10^{-5}$, la máxima energía dispersada por la nube se da para una frecuencia de excitación similar a la frecuencia natural de las burbujas ω_n . Este resultado indica que la nube, en este régimen, está acústicamente diluida debido a la debilidad de los fenómenos de acoplamiento y dispersión múltiple entre las burbujas. En cambio, a medida que aumentamos β por encima de este umbral, vemos que la dispersión máxima tiende a

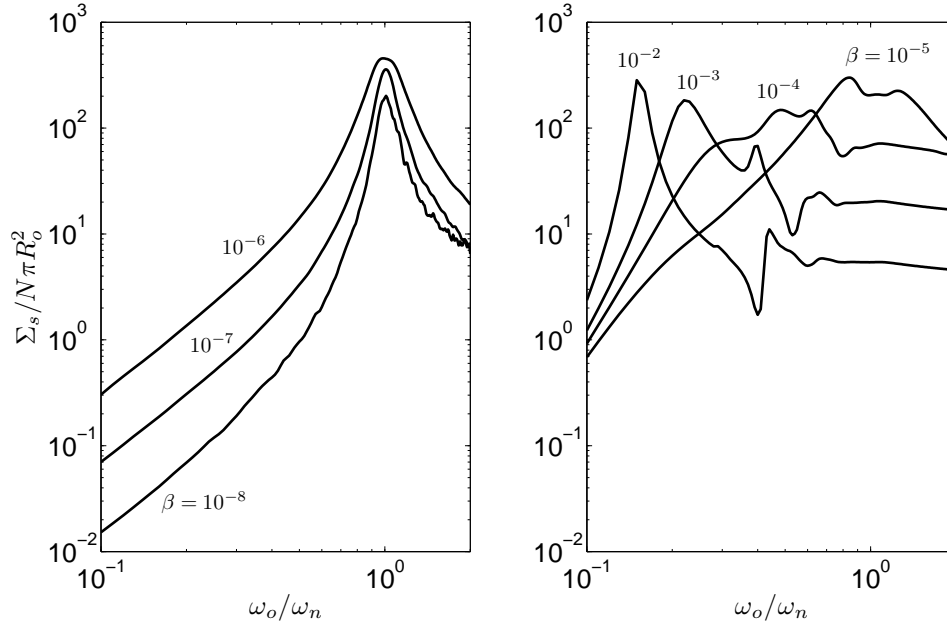


Figura 5.16: Espectro de la sección eficaz de dispersión $\Sigma_s/N\pi R_o^2$, producida por una nube de $N = 2000$ burbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$, para distintas fracciones de vacío β .

desplazarse hacia valores inferiores en el espectro de frecuencias, lo que sugiere la ocurrencia de modos colectivos resonantes provocados por la presencia de acoplamiento acústico [Omta (1987), d'Agostino (1989), Hahn (2007)]. Como vemos en la Fig. 5.16, una mayor población N de burbujas hace que la localización de la dispersión máxima, en este último régimen, se de para frecuencias más bajas, lo cual es coherente con el análisis del DOS realizado para los modos de oscilaciones colectivas [Zeravcic (2011)]. Sin embargo, para el régimen de nubes acústicamente diluidas, la población de burbujas no modifica la localización del máximo, el cual siempre ocurre a ω_n .

Para cada valor de la fracción de vacío, se observa un máximo de dispersión dominante frente a otros máximos relativos localizados a lo largo del espectro. Para valores elevados de β , la dispersión dominante se corresponde con el modo colectivo fundamental de la nube. Sin embargo, a medida que este parámetro disminuye por debajo de $\beta = 10^{-3}$, la dispersión producida por el modo dipolar comienza a dominar. Lo mismo ocurre para valores cercanos a $\beta = 10^{-4}$, donde el modo cuadrupolar comienza a dispersar el mismo nivel de energía que su modo predecesor. Así pues, podemos decir que en el rango $\beta = 10^{-4} - 10^{-6}$, la dispersión máxima no será la debida a las oscilaciones colectivas de un modo concreto, sino a la contribución de una amplia gama de modos, todos ellos con unas frecuencias propias muy cercanas [Omta (1987), d'Agostino (1989)]. Concluimos entonces que, a medida que la nube se diluye, existe una transferencia espectral, desde el modo fundamental hacia los modos superiores, de la dispersión de energía acústica. El hecho de que la energía dispersada correspondiente a un modo domine sobre los otros, tiene que ver con la amplitud de la respuesta dinámica de las oscilaciones colectivas. Como hemos visto, la configuración de este campo de oscilaciones se adapta al modo que está siendo excitado: si la excitación es tal que $kA \ll 1$, las oscilaciones colectivas de mayor amplitud se darán para el modo fundamental, maximizando en consecuencia la energía dispersada. Sin embargo, cuanto mayor sea el parámetro kA ,

se excitarán de manera preferente los modos dipolares, cuadrupolares, etc., los cuales responderán con máxima amplitud (ver Fig. 5.12).

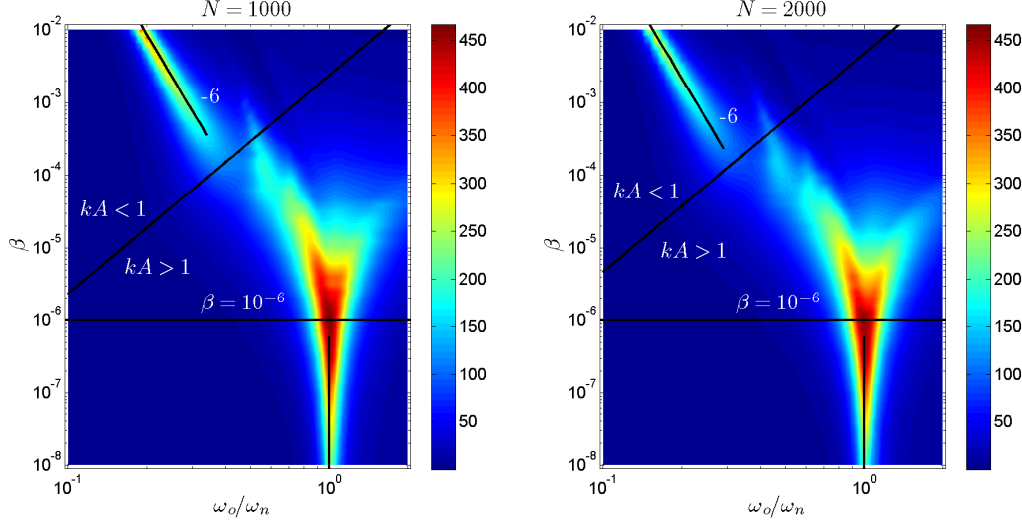


Figura 5.17: Mapa de la dispersión acústica producida por una nube de burbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$. En la escala de colores se muestra el valor de la sección eficaz de dispersión normalizado $\Sigma_s/N\pi R_o^2$.

En la Fig. 5.17 se muestra el mapa de la dispersión acústica para dos nubes con distinta población N de burbujas. Este mapa nos permite observar los diferentes regímenes de dispersión de forma clara. Como vemos, dado que la población está fijada, a medida que baja la fracción de vacío, aumenta el tamaño de la nube, y por tanto crece el valor de kA . Para frecuencias bajas y altos valores de β , la dispersión dominante es la correspondiente al modo fundamental, ya que $kA \ll 1$. Comprobamos que la curva que une los máximos, en este régimen, es $\Omega/\omega_n \propto \beta^{-1/6}$. A medida que la nube se diluye y aumenta la frecuencia de excitación, entramos en la región $kA > 1$, de forma que la dispersión debida al modo dipolar, junto con la debida al resto de modos superiores, comienzan a dominar en el espectro. Es en esta zona donde se produce la transferencia espectral hacia los modos colectivos cercanos a ω_n , por lo que constituirá una región de transición al régimen de nube desacoplada. Efectivamente, cuando la fracción de vacío alcanza valores inferiores a $\beta = 10^{-6}$, todos los modos colectivos ocurren a la frecuencia de resonancia de las burbujas, lo que indica que la nube está acústicamente diluida.

5.3.2. Teoría del Medio Efectivo

Hemos visto que, para valores altos de la fracción de vacío β , la sección eficaz de dispersión máxima se desplaza hacia valores muy bajos en comparación con ω_n en el espectro de frecuencias de excitación. Esto sugiere la ocurrencia de resonancias colectivas en la nube bajo estas condiciones, provocado por un elevado acoplamiento acústico entre las burbujas. Como se vio en la sección anterior, cuando la fracción de vacío es lo suficientemente alta como para que se cumpla $\beta \gg (kR_o)^3$, la nube de burbujas puede ser tratada como un medio continuo con unas propiedades efectivas [Caffisch (1985), Commander (1989)]. A continuación, con el fin de caracterizar analíticamente el comportamiento resonante de la nube en cuanto a la dispersión acústica,

calcularemos el valor de la sección eficaz de dispersión Σ_s bajo la hipótesis de medio continuo, lo que da lugar a la *Teoría del Medio Efectivo* [Foldy (1945)]. Esta teoría plantea el cálculo de Σ_s para una nube esférica a través de la resolución del problema de dispersión acústica por una esfera fluida con unas propiedades efectivas [Anderson (1950)].

Efectivamente, bajo las condiciones que nos permiten modelar la nube de burbujas como un medio continuo, la expresión discreta para el cálculo de \hat{p}_s se puede reescribir de forma continua definiendo una densidad numérica de burbujas dentro de la nube. De esta manera, considerando una población monodispersa con una densidad δ homogénea, tenemos que

$$\hat{p}_s(\mathbf{r}) = 4\pi\delta f_s \int_{V_c} \left[P_a e^{ikz'} + \xi(\mathbf{r}') \right] G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau', \quad (5.38)$$

siendo $G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ la función de Green para la ecuación de Helmholtz tridimensional, definida en la Sec. 5.2.3. Como se plasma en (5.15), la forma continua de ξ resulta $\xi(\mathbf{r}) = 4\pi\delta f_s \int_{V_c} [P_a \exp(ikz') + \xi(\mathbf{r}')] G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau'$, demostrando que los campos \hat{p}_s y ξ son conceptual y matemáticamente idénticos. La expresión mostrada en (5.38) para la presión total dispersada constituye, por tanto, una aproximación de primer orden del problema de dispersión múltiple: dado que $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$, ninguna cadena de dispersión podrá visitar dos veces la misma burbuja, lo que impide la existencia de lazos cerrados. Por otro lado, substituyendo ξ dentro del integrando de (5.38), llegamos a

$$\begin{aligned} \hat{p}_s(\mathbf{r}) = & 4\pi\delta f_s \int_{V_c} P_a e^{ikz'} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau' + \\ & + (4\pi\delta f_s)^2 \iint_{V_c} \left[P_a e^{ikz''} + \xi(\mathbf{r}'') \right] G_k(\mathbf{r}'|\mathbf{r}'') G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau'' d\tau', \end{aligned} \quad (5.39)$$

expresión que introduce una corrección de segundo orden para el cálculo de la presión total dispersada. En este caso nada impide que $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}$, de manera que una burbuja puede verse involucrada dos veces como máximo en una cadena de dispersión. En consecuencia, la aproximación de segundo orden del problema de dispersión múltiple asume la existencia de lazos cerrados simples [Henyey (1999)]. Tras sucesivas substituciones, podemos construir finalmente

$$\begin{aligned} \hat{p}_s(\mathbf{r}) = & 4\pi\delta f_s \int_{V_c} P_a e^{ikz'} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau' + \\ & + (4\pi\delta f_s)^2 \iint_{V_c} P_a e^{ikz''} G_k(\mathbf{r}'|\mathbf{r}'') G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau'' d\tau' + \\ & + (4\pi\delta f_s)^3 \iiint_{V_c} P_a e^{ikz'''} G_k(\mathbf{r}''|\mathbf{r}''') G_k(\mathbf{r}'|\mathbf{r}'') G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau''' d\tau'' d\tau' + \dots, \end{aligned} \quad (5.40)$$

expresión que representa la solución exacta para el campo total dispersado por la nube de burbujas. Como vemos, este resultado tiene en cuenta la existencia de un número arbitrariamente grande de lazos cerrados para las distintas cadenas de dispersión. En el caso que nos atañe, los fenómenos resonantes colectivos se producen generalmente en nubes con elevadas densidades de burbujas. En consecuencia, si $\delta^{1/3}|f_s| \gg 1$, se deberán tener en cuenta los infinitos términos de la solución, con lo que su cómputo resulta inabordable.

No obstante, con el fin de obtener un resultado analítico aproximado, asumiremos que la densidad de burbujas es lo suficientemente baja como para que no se produzcan

lazos cerrados durante el fenómeno de dispersión múltiple. Esta simplificación, equivalente a la aproximación estadística de Foldy, requiere formalmente que $\delta^{2/3}|f_s|^2 \ll 1$ [Foldy (1945), Commander (1989)]. Así pues, bajo esta aproximación de primer orden, la onda total dispersada (5.38) cumplirá, por construcción, la ecuación de Helmholtz no homogénea $\nabla^2 \hat{p}_s + k^2 \hat{p}_s = -4\pi\delta f_s [P_a \exp(ikz) + \xi]$. De esta manera, y asumiendo que $\xi \equiv \hat{p}_s$, la presión dispersada en el interior, \hat{p}_{se} , y en el exterior, \hat{p}_{so} , de la nube deben satisfacer

$$\nabla^2 \hat{p}_{se} + k_e^2 \hat{p}_{se} = -4\pi\delta f_s P_a e^{ikz} \quad \text{para } r \leq A, \quad (5.41)$$

$$\nabla^2 \hat{p}_{so} + k^2 \hat{p}_{so} = 0 \quad \text{para } r \geq A, \quad (5.42)$$

donde $k_e^2 = k^2 + 4\pi\delta f_s$ es el número de onda efectivo [Foldy (1945)]. Este número de onda resulta generalmente complejo, pudiéndose escribir como $k_e = \omega_o/c_e + i\alpha/2$, donde c_e es la velocidad efectiva del medio, y α es el coeficiente de atenuación [Leroy (2008)]. De esta manera, tendremos que

$$c_e = [k^2 + 4\pi\delta \text{Re} f_s + \alpha^2/4]^{-1/2}, \quad (5.43)$$

$$\alpha = 4\pi\delta c_e \text{Im} f_s / \omega_o, \quad (5.44)$$

expresiones que han de evaluarse de manera conjunta. Nótese que la dependencia de la velocidad efectiva con la frecuencia pone de manifiesto el carácter dispersivo de este medio bifásico [Wijngaarden (1968)]. Para bajas frecuencias de excitación, la velocidad de propagación dentro de la nube será $c_e < c_\infty$, lo cual constituye un resultado básico en la propagación de ondas en medios bifásicos [Wood (1932), Wijngaarden (1972)]. Por otro lado, las ecuaciones planteadas en (5.41) y (5.42) deben ser resueltas sujetas a las condiciones de continuidad en presiones y en velocidades normales a través del contorno de la nube [Hahn (2007)],

$$\hat{p}_{se}|_{r=A} = \hat{p}_{so}|_{r=A}, \quad (5.45)$$

$$\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \hat{p}_{se}}{\partial r} \Big|_{r=A} = \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \hat{p}_{so}}{\partial r} \Big|_{r=A}, \quad (5.46)$$

donde $\rho_e \simeq \rho_\infty(1 - \beta)$ es la densidad másica efectiva. De igual manera en la que se procedió en la Sección 5.2.3, la solución a este problema se construye

$$\hat{p}_{se} = -P_a e^{ikz} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_e r) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r \leq A, \quad (5.47)$$

$$\hat{p}_{so} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r \geq A, \quad (5.48)$$

donde los coeficientes B_n y C_n de ambas expansiones se corresponden, respectivamente, con los expuestos en (5.22) y (5.23). Una vez encontrada la solución para la presión dispersada, podemos construir el campo de presión acústica total \hat{p} . De este modo, en la región interior de la nube se tiene $\hat{p} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_e r) P_n(\cos \theta)$. Dada la naturaleza del número de onda efectivo k_e , la onda total se propagará a través de la nube a una velocidad efectiva c_e , atenuándose según el coeficiente α a medida que la recorre [Silberman (1957), Prosperetti (1988), Commander (1989)]. Nótese en la Fig. 5.18 que para nubes lo suficientemente diluidas, la velocidad efectiva se aproxima por $c_e \simeq c_\infty$. Esto hace que el coeficiente de atenuación se pueda escribir como $\alpha = 4\pi\delta|f_s|^2 \Gamma / \Gamma_{ac} = \delta\sigma_e$,

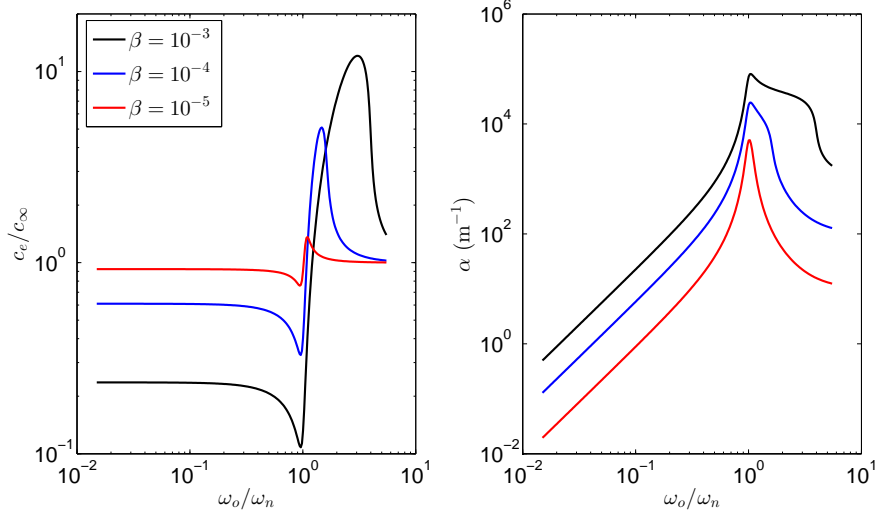


Figura 5.18: Velocidad del sonido efectiva c_e y coeficiente de atenuación α correspondiente a una suspensión monodispersa de burbujas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$, para distintos valores de la fracción de vacío β .

siendo σ_e la sección eficaz de extinción de las burbujas. En cambio, en el exterior de la nube, la onda total será $\hat{p} = P_a \exp(ikz) + \hat{p}_{so}$, la cual se propaga, sin atenuación, a una velocidad c_∞ como era de esperar.

Para evaluar la sección eficaz de dispersión de la nube, necesitamos calcular el comportamiento asintótico de la onda dispersada \hat{p}_s en el campo lejano. Las funciones de Hankel esféricas, las cuales establecen la propagación de la onda dispersada en el exterior de la nube, se pueden escribir como $h_n^{(1)}(kr) \simeq (-i)^{n+1} \exp(ikr)/kr$ para valores $kr \gg 1$ [Williams (1999)]. Por tanto, el campo total dispersado en el campo lejano puede aproximarse por

$$\hat{p}_s \simeq P_a \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos \theta), \quad (5.49)$$

donde $S_n = (-i)^{n+1} C_n / P_a k$. De esta manera, la función de dispersión de la nube, calculada mediante la Teoría del Medio Efectivo, resulta simplemente

$$F_s = \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos \theta). \quad (5.50)$$

Esta expresión analítica muestra explícitamente las propiedades direccionales de la dispersión acústica de una onda plana por una nube de burbujas esférica [Hahn (2007)]. Como vemos, esta característica depende únicamente del ángulo polar θ debido a la axilsimetría del problema. Finalmente, la sección eficaz de dispersión se escribe

$$\Sigma_s = \int_{\Omega} |F_s(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \left| \sum_{n=0}^{\infty} S_n P_n(\cos \theta) \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (5.51)$$

En la Fig. 5.19 se compara el resultado semianalítico para Σ_s , obtenido a través de la Teoría del Medio Efectivo, con los resultados numéricos mostrados anteriormente

para fracciones de vacío $\beta \geq 10^{-5}$. Como se observa, se recupera de forma muy precisa el comportamiento de la sección eficaz en este régimen. A la vista de la expresión (5.51), y debido a la forma del coeficiente S_n , la función trascendental a partir de la cual se obtienen los modos resonantes será idéntica que la función ζ_n definida en (5.25). Esto

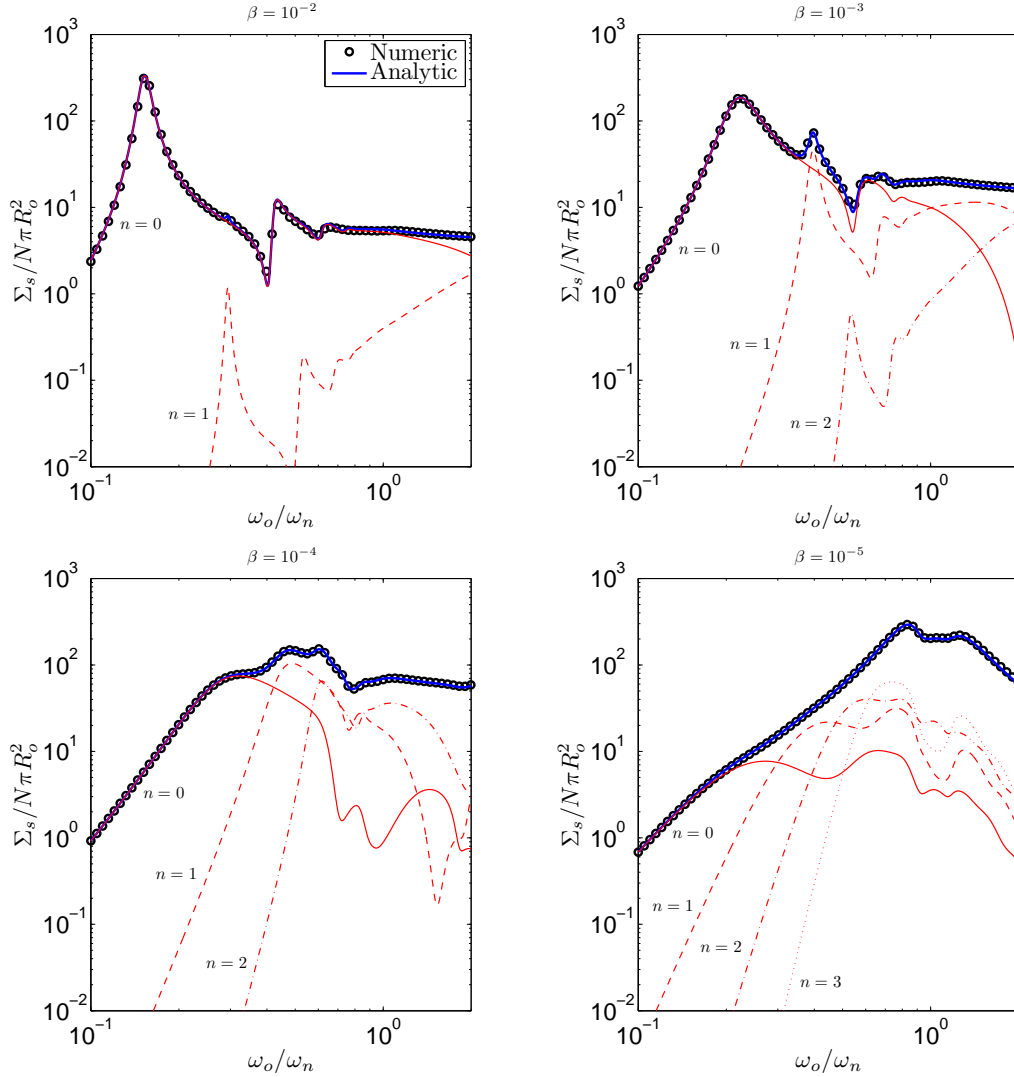


Figura 5.19: Comparación entre la solución numérica y la semianalítica del espectro de la sección eficaz de dispersión $\Sigma_s / N\pi R_o^2$, producida por una nube de $N = 2000$ burbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$.

nos revela, como era de esperar, que los máximos para la dispersión acústica se dan para las frecuencias propias asociadas a cada modo colectivo. Por otro lado, se han representado en la Fig. 5.19 las contribuciones individuales al valor total de Σ_s de los patrones asociados a cada valor de n . Confirmamos entonces que, para valores altos de β , la dispersión asociada al modo fundamental domina en el espectro [d’Agostino (1988)]. Dado que en esta región se tiene que $kA \ll 1$, la frecuencia de resonancia asociada a este modo se corresponde, de manera aproximada, con la plasmada en (5.28). En consecuencia, encontramos que $\Omega_0^0 / \omega_n \simeq (\pi^2/12)^{1/2} N^{-1/3} \beta^{-1/6}$, resultado que valida la tendencia obtenida numéricamente en la Fig. 5.17. Finalmente, a medida que la fracción

de vacío se acerca $\beta = 10^{-6}$, los modos de orden superior comienzan a contribuir conjuntamente de forma dominante, poniendo de manifiesto la transferencia espectral de energía acústica que se produce en esta región.

5.3.3. Dispersión en nubes acústicamente diluidas

La Teoría del Medio Efectivo nos ha facilitado una expresión semianalítica, dada por (5.51), para el cálculo de la sección eficaz de dispersión de una nube de burbujas, la cual es válida para las condiciones en las que se cumple la hipótesis de medio continuo. Esto es, para fracciones de vacío tales que $\beta \gg (kR_o)^3$, o para excitaciones que satisfagan $kA \ll N^{1/3}$. Se puede comprobar que la localización de los máximos de dispersión acústica en la región $\beta \gg 10^{-6}$ permite aplicar esta teoría con el fin de estudiar analíticamente el comportamiento resonante de las nubes de burbujas. Sin embargo, para valores muy bajos de la fracción de vacío, la hipótesis de medio continuo pierde validez en la zona resonante del espectro. A continuación, intentaremos hallar una expresión analítica, válida para todo el espectro de frecuencias, que permita la caracterización de la dispersión total por una nube de burbujas acústicamente diluida.

Basándonos en el modelo continuo de nubes monodispersas, calcularemos la sección eficaz de dispersión de una nube esférica en el límite $\beta \ll 10^{-6}$. Dado que en esta región se cumple $\delta^{1/3}|f_s| \ll 1$ para todo el rango de frecuencias, podemos ignorar los fenómenos de dispersión múltiple en el cálculo de la onda total dispersada. Efectivamente, el primer término de la expresión (5.40) será dominante frente a los demás en estas condiciones, proporcionándonos una aproximación para \hat{p}_s . Esto implica que, para nubes acústicamente diluidas, la dispersión total será consecuencia únicamente de la dispersión simple de la onda incidente. Esta hipótesis se conoce como *Aproximación de Born*, la cual establece interacciones nulas entre las burbujas [Wu (1962)]. En consecuencia, el campo de presión dispersada se escribe simplemente

$$\hat{p}_s(\mathbf{r}) \simeq 4\pi\delta f_s \int_{V_c} P_a e^{ikz'} G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}') d\tau' = \delta f_s \int_{V_c} P_a e^{ikz'} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\tau', \quad (5.52)$$

El cálculo de la sección eficaz de dispersión se realiza en el campo lejano de la nube de burbujas, por lo que se puede aproximar $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \simeq r - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r$, siendo \mathbf{u}_r el versor en la dirección de \mathbf{r} . De esta manera, la onda dispersada se expresa $\hat{p}_s(\mathbf{r}) = P_a F_s \exp(ikr)/r$, con lo que la resolución del problema pasa exclusivamente por la evaluación de la función de dispersión

$$F_s = \int_{V_c} \delta f_s e^{-i(k\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r - kz')} d\tau'. \quad (5.53)$$

Comprobamos que en el límite $kA \ll 1$, la función de dispersión tiene el resultado trivial $F_s \simeq \delta f_s V_c$. Por consiguiente, la sección eficaz de dispersión de la nube valdrá

$$\Sigma_s = \int_{\Omega} |F_s|^2 d\Omega = N^2 \sigma_s, \quad (5.54)$$

habiéndose considerado una población de burbujas $N = \delta V_c$, y siendo $\sigma_s = 4\pi|f_s|^2$ la sección eficaz de dispersión para una burbuja aislada. Esta expresión constituye un resultado básico en el estudio de la dispersión de ondas por nubes de partículas en general: en este límite, los componentes de la nube dispersan las ondas en fase, lo que da lugar a una radiación coherente de energía proporcional a N^2 debido a los

fenómenos de interferencias constructivas [Morse (1968)]. En analogía con el fenómeno óptico, podemos citar a Richard P. Feynman: “We have just explained that every atom scatters light, and of course the water vapor will scatter light, too. The mystery is why, when the water is condensed into clouds, does it scatter such a tremendously greater amount of light? Consider what would happen if, instead of a single atom, we had an agglomerate of atoms, say two, very close together compared with the wavelength of the light. (...) Then when the electric field acts, both of the atoms will move together. The electric field that is scattered will then be the sum of the two electric fields in phase, i.e., double the amplitude that there was with a single atom, and the energy which is scattered is therefore four times what it is with a single atom, not twice! So lumps of atoms radiate or scatter more energy than they do as single atoms.” (Lectures on Physics).

A continuación se abordará el cálculo de la función de dispersión de la nube para excitaciones con longitudes de ondas arbitrariamente grandes haciendo uso de conceptos y elementos de mecánica cuántica. Así pues, en primer lugar, el argumento de F_s debe ser adaptado a la nueva formulación. Haciendo $z' = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_z$, siendo \mathbf{u}_z el versor en la dirección de z , podemos escribir

$$F_s = \int_{V_c} \delta f_s e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} d\tau', \quad (5.55)$$

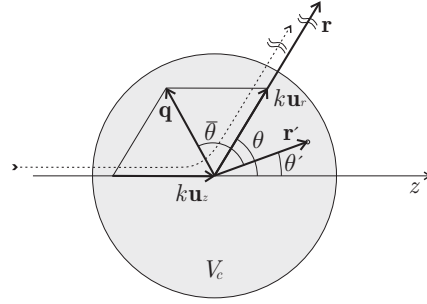


Figura 5.20: Esquema de la dispersión de una partícula cuántica (línea punteada).

donde se ha definido el vector $\mathbf{q} = k(\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_z)$, cuyo módulo tiene un valor $q = 2k \sin(\theta/2)$. En mecánica cuántica, el término $\hbar \mathbf{q}$, donde \hbar es la constante de Planck, representa la variación de la cantidad de movimiento que experimenta una partícula dispersada, según un cierto ángulo θ , por un núcleo atómico [Landau (1958)]. De esta manera, la resolución de F_s puede llevarse a cabo de forma trivial si elegimos un ángulo polar $\bar{\theta}$, basado en el ángulo que forman los vectores \mathbf{q} y \mathbf{r}' , en vez de θ' . Así pues, el desarrollo del integrando de F_s se escribe haciendo $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}' = q r' \cos \bar{\theta}$, con lo que la integral finalmente resulta

$$F_s = 4\pi \delta f_s \left[\frac{\sin(qA) - qA \cos(qA)}{q^3} \right]. \quad (5.56)$$

Nótese que toda la información relativa al número de onda k y el ángulo de dispersión θ está recogida dentro del valor de q . Así pues, la sección eficaz de dispersión de la nube se puede expresar analíticamente como

$$\Sigma_s = \int_{\Omega} |F_s|^2 d\Omega = N^2 \sigma_s \frac{9/2}{(2kA)^2} \left[1 - \frac{1}{(2kA)^2} + \frac{\sin(4kA)}{(2kA)^3} - \frac{\sin^2(2kA)}{(2kA)^4} \right]. \quad (5.57)$$

Como se observa en la Fig. 5.21, en el límite $kA \ll 1$ se recupera la solución trivial, es decir $\Sigma_s = N^2 \sigma_s$. Sin embargo, para valores infinitamente grandes de kA , la expresión (5.57) predice que la sección eficaz de dispersión de la nube tiende a un valor nulo, lo cual es inexacto. Esto es debido a que, para $kA \gg N^{1/3}$, la separación media entre burbujas es mucho mayor que las longitudes de onda de la excitación, con lo que el planteamiento de medio continuo para el cálculo de la onda total dispersada, y por

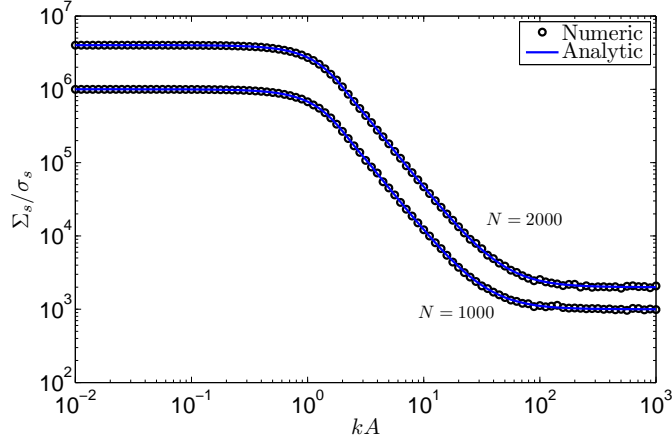


Figura 5.21: Relación entre la sección eficaz de dispersión de una nube Σ_s y la sección eficaz de las burbujas σ_s . La fracción de vacío de la nube es $\beta = 10^{-10}$. Se comprueba que, para $kA \ll 1$, las curvas tienden a N^2 , mientras que para $kA \gg 1$, estas tienden a N .

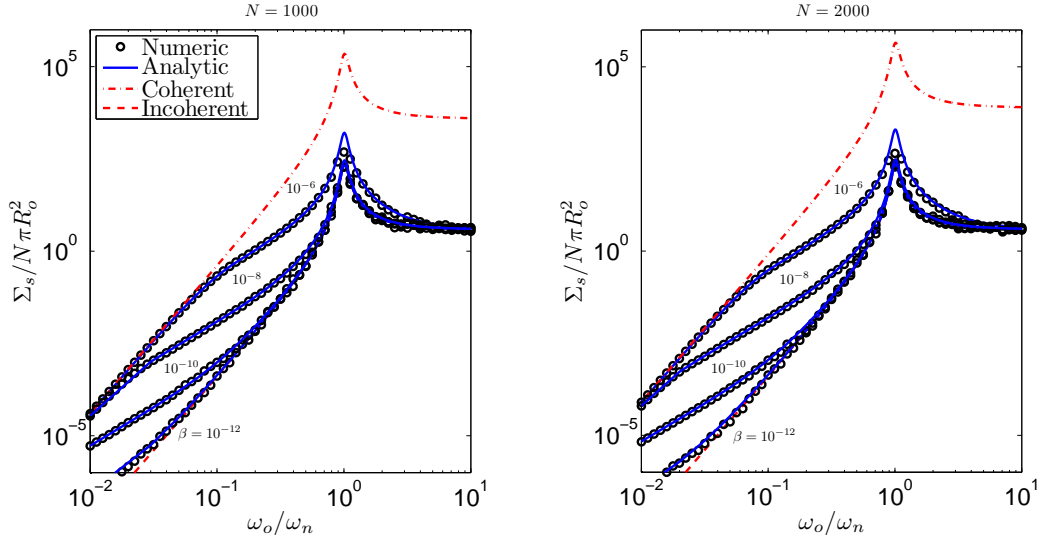


Figura 5.22: Comparación entre la solución numérica y la analítica del espectro de la sección eficaz de dispersión $\Sigma_s / N \pi R_o^2$ para nubes monodispersas ($R_o = 3 \mu\text{m}$) acústicamente diluidas. Se observa, en cada caso, la transición entre el régimen coherente e incoherente de la dispersión acústica.

tanto, la integral de la expresión (5.52) deja de tener sentido. En este caso, el valor de Σ_s será simplemente la suma lineal de todas las contribuciones discretas de las N burbujas que componen la nube, por lo que $\Sigma_s = N\sigma_s$. Así pues, la solución uniformemente válida para la sección eficaz será

$$\Sigma_s = N^2 \sigma_s \frac{9/2}{(2kA)^2} \left[1 - \frac{1}{(2kA)^2} + \frac{\sin(4kA)}{(2kA)^3} - \frac{\sin^2(2kA)}{(2kA)^4} \right] + N\sigma_s. \quad (5.58)$$

Comprobamos en la Fig. 5.21 que para grandes valores de kA , la sección eficaz de dispersión tiende, efectivamente, a $N\sigma_s$. Este comportamiento se conoce como dispersión incoherente: las burbujas, al estar mucho más separadas que la longitud de onda de

la excitación, dispersan la energía acústica con fases aleatorias dependiendo de su posición dentro de la nube. Esto hace que se produzcan, estadísticamente hablando, el mismo número de interferencias destructivas que constructivas de la energía dispersada, resultando finalmente una radiación incoherente proporcional a N [Morse (1968)].

El resultado analítico encontrado, que recoge la transición suave entre los regímenes coherente e incoherente de la dispersión acústica, queda plasmado en la Fig. 5.22. Se observa la exactitud de la expresión en la comparación con los resultados numéricos obtenidos anteriormente para nubes con un bajo valor de la fracción de vacío [Sarkar (1994)]. No obstante, para $\beta = 10^{-6}$, aparece cierta discrepancia alrededor de la frecuencia natural ω_n . Esto es debido a la presencia de fenómenos de dispersión múltiple en esta zona del espectro. Por tanto, los efectos de acoplamiento, aunque débiles, hacen que la Aproximación de Born realizada no sea válida en esta región, por lo que debe ser corregida añadiendo términos de segundo orden en la expresión para la onda total dispersada (técnicas perturbativas).

5.4. Propagación de ondas a través de nubes de burbujas

En las secciones previas, hemos caracterizado numérica y analíticamente el comportamiento de la dispersión acústica total en nubes de burbujas esféricas y monodispersas. Este análisis nos ha permitido establecer diferentes regímenes de dispersión según la localización del máximo resonante en el plano $\beta - \omega_o$. A continuación visualizaremos la propagación de las ondas acústicas a través de distintas nubes, lo que nos permitirá asociar cada régimen de dispersión a una fenomenología ondulatoria determinada. Así pues, para una frecuencia de excitación y una fracción de vacío concreta, calcularemos numéricamente el campo de presión acústica total $p = p_a + p_s$ debido a la interacción entre una onda plana y una nube de burbujas esférica.

Retomando el resultado numérico para el mapa de dispersión de una nube, hemos representado en la Fig. 5.23 los puntos para los cuales se ha realizado el cálculo de la presión acústica total. En el caso (a), nos situaremos justo en las condiciones resonantes debida al modo colectivo fundamental. Como vemos en la Fig. 5.24 y Fig. 5.25, la propagación de la onda incidente, la cual posee una gran longitud de onda en comparación con el tamaño de la nube, se ve afectada debido a la dispersión resonante (con patrón monopolar) de energía acústica. En el punto (b), la onda incidente, con una frecuencia más elevada, excita el modo colectivo dipolar de la nube. De esta manera, se observa una dispersión de energía de acuerdo a un patrón de esta naturaleza. Para el caso (c), vemos que para nubes algo más diluidas, la dispersión de patrón cuadrupolar se vuelve dominante en el espectro. Nótese cómo el frente de ondas incidente tiende a retrasarse dentro de la nube debido a la disminución de la velocidad del sonido efectiva. Esto hace que la nube, en estas condiciones, se comporte como una lente acústica, aumentando notablemente la presión total en su parte trasera (región focal).

Como ya se comentó, para nubes lo suficientemente diluidas dentro de la región de transición, y excitadas a frecuencias cercanas a ω_n , la dispersión máxima es consecuencia de la superposición de una gran variedad de modos colectivos de orden superior. Debido a esto, la onda dispersada seguirá unos patrones cada vez más complejos y no catalogables. En el punto (d), observamos el efecto de apantallamiento, característico para $\omega_o = \omega_n$, de las burbujas situadas en la corteza externa de la nube. En este caso, las longitudes de onda finitas de la excitación provocan efectos de difracción, los cuales

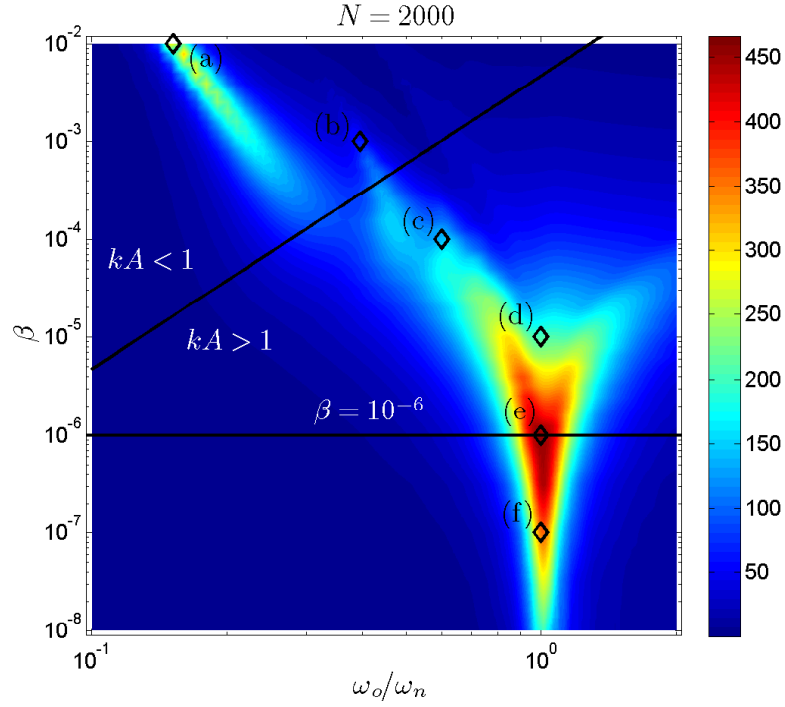


Figura 5.23: Mapa de la dispersión acústica Σ_s producida por una nube de $N = 2000$ burbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$. Los diamantes indican los valores de β y ω_o usados en las distintas simulaciones.

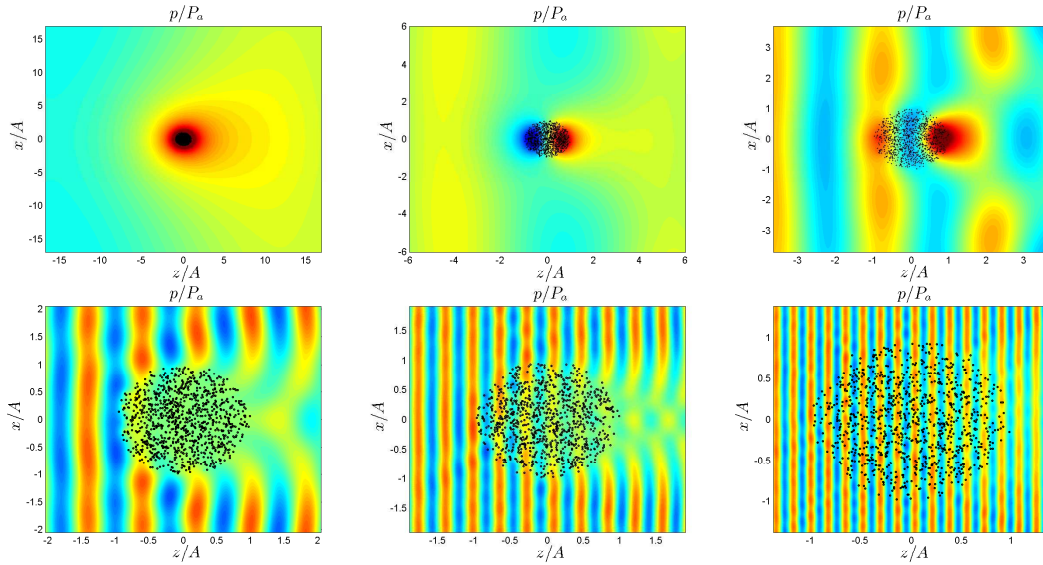


Figura 5.24: Propagación acústica a través de una nube monodispersa con $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$. Campo de presión total instantáneo. (a) $\omega_o/\omega_n = 0.152$ y $\beta = 10^{-2}$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.396$ y $\beta = 10^{-3}$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.600$ y $\beta = 10^{-4}$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-5}$, (e) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-6}$, (f) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-7}$. La escala de colores representa la presión acústica en el instante considerado: el rojo indica la presión máxima positiva, mientras que el azul indica la presión máxima negativa.

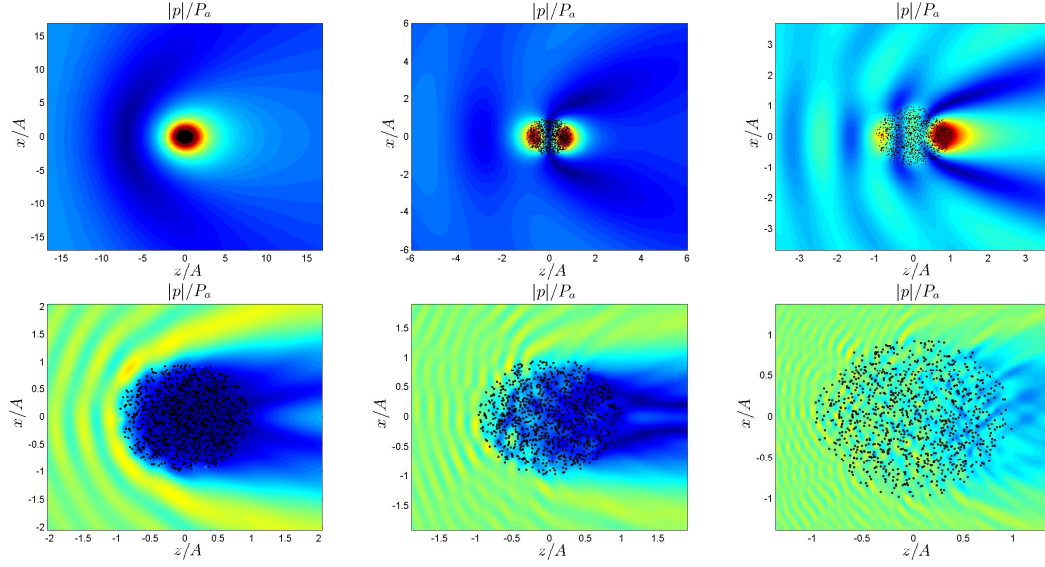


Figura 5.25: Propagación acústica a través de una nube monodispersa con $N = 2000$ burbujas de $R_o = 3 \mu\text{m}$. Amplitud del campo acústico total. (a) $\omega_o/\omega_n = 0.152$ y $\beta = 10^{-2}$, (b) $\omega_o/\omega_n = 0.396$ y $\beta = 10^{-3}$, (c) $\omega_o/\omega_n = 0.600$ y $\beta = 10^{-4}$, (d) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-5}$, (e) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-6}$, (f) $\omega_o/\omega_n = 1$ y $\beta = 10^{-7}$. La escala de colores representa la amplitud acústica: el rojo indica la presión máxima, mientras que azul indica presión nula.

explican la aparición de una región de sombra acústica detrás de la nube. Nótese en la Fig. 5.25 el gran decaimiento de la intensidad acústica a lo largo de la nube debido al alto nivel de atenuación. Finalmente, en los casos (e) y (f), la nube puede considerarse acústicamente diluida. Así pues, vemos que la dispersión resonante es debida a la contribución individual de cada una de las burbujas, lo que explica las fluctuaciones espaciales aleatorias observadas en campo total de presión acústica. No obstante, como se ha demostrado, a medida que baja la fracción de vacío, el coeficiente de atenuación disminuye. Esto hace que el efecto de apantallamiento se vuelva más débil, permitiendo que las ondas se propaguen a través de la nube con una mayor amplitud.

El análisis de la interacción acústica entre nubes con geometría esférica y ondas planas monocromáticas, constituye un método muy útil para estudiar analíticamente, y de forma rigurosa, los modos de resonancia colectivos y las propiedades de la dispersión acústica en nubes de burbujas. No obstante, la forma de las excitaciones acústicas usadas en las distintas aplicaciones tecnológicas, junto con las posibles configuraciones geométricas de las nubes, quedan muy lejos de la formulación aquí planteada. Sin embargo, el algoritmo y código desarrollado, basado en la teoría auto-consistente de la dispersión múltiple, nos permite abordar numéricamente la propagación de ondas acústicas de cualquier naturaleza a través de nubes de burbujas con cualquier geometría. Como ejemplo, véase la Fig. 5.26, donde se ha simulado la dispersión de un haz acústico finito, irradiado por un transductor piezoeléctrico, por una nube de burbujas esférica. Por otro lado, haciendo uso de la herramienta FFT para el análisis espectral de señales, podremos simular también la propagación y dispersión de paquetes de ondas como se muestra en la Fig. 5.27. En estos casos, la visualización de los fenómenos de dispersión múltiple resultan más evidentes.

Para concluir este estudio, se ha simulado la propagación de un pulso acústico, ge-

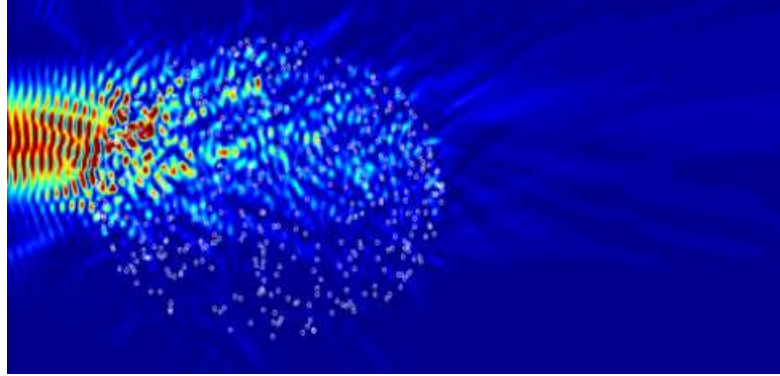


Figura 5.26: Propagación de una haz irradiado por un transductor a través de una nube de burbujas esférica. La escala de colores representa la amplitud acústica.

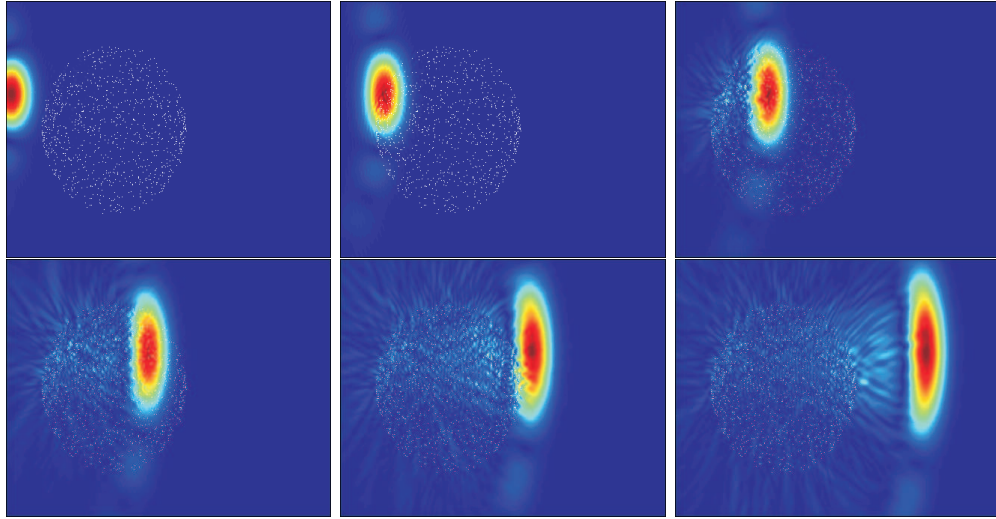


Figura 5.27: Propagación, para varios instantes, de un pulso acústico a través de una nube de burbujas esférica. La escala de colores representa la amplitud acústica.

nerado por un transductor, a través de una lámina de microburbujas monodispersas de radio $R_o = 3 \mu\text{m}$, con el fin de visualizar los fenómenos de atenuación y dispersión acústica que tienen lugar en el montaje experimental propuesto en el Capítulo 4 [Leroy (2008), Leroy (2009)]. Como se muestra en la Fig. 5.28, un paquete de ondas con una frecuencia central de 2.25 MHz, penetra en la lámina de microburbujas para finalmente dispersarse. El mapa de colores en cada instante revela un decaimiento en la amplitud total del pulso acústico debido a los fenómenos de absorción y dispersión, la cual se observa claramente en la Fig. 5.28(e) y 5.28(f), una vez el paquete de ondas ha sobrepasado la lámina.

5.5. Conclusiones

La dinámica de las oscilaciones acopladas entre las burbujas dentro de una nube ha sido formulada con el fin de reconocer y analizar los distintos comportamientos colec-

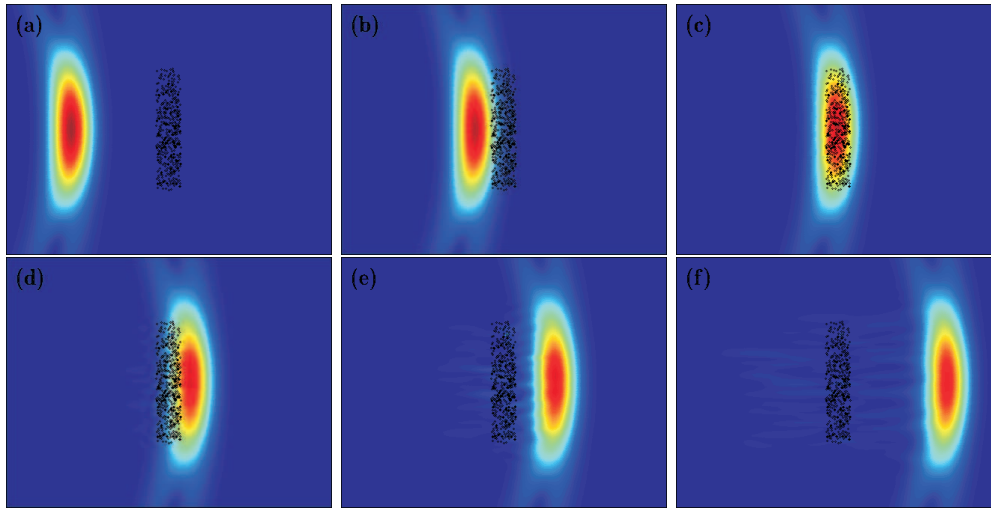


Figura 5.28: Simulación de la propagación de un pulso acústico a través de una lámina de microburbujas monodispersas. La escala de colores representa la amplitud acústica.

tivos en el régimen lineal. Así pues, se ha resuelto de forma numérica el problema de autovalores asociado, a partir del cual hemos podido obtener los modos de oscilaciones colectivas y las frecuencias propias de una nube esférica. Esta solución nos ha permitido visualizar las distintas configuraciones espaciales de los modos colectivos, confirmando que el modo fundamental se produce a una frecuencia mucho menor que la frecuencia natural de las burbujas. Una vez identificados estos modos, se ha calculado numéricamente la respuesta forzada de una nube ante excitaciones acústicas externas. Los resultados obtenidos muestran que la compresibilidad del medio juega un papel fundamental a la hora de establecer la frecuencia de resonancia y configuración final de las oscilaciones de una nube de burbujas. Para validar estos resultados, se ha obtenido una solución analítica basada en la aproximación de medio continuo. Esta aproximación, la cual demuestra ser válida para un amplio rango paramétrico, nos permite obtener de forma teórica los modos y frecuencias propias de una nube de burbujas esférica, corrigiendo los resultados clásicos basados en la hipótesis de medio incompresible.

Por otro lado, y conectado con el comportamiento de las oscilaciones colectivas, se ha formulado el problema de la dispersión acústica debido a la interacción de una onda externa con una nube de burbujas. Basándonos en la teoría auto-consistente de la dispersión múltiple, se ha desarrollado un algoritmo con el fin de calcular numéricamente la presión acústica total dispersada por la nube en cada punto del espacio. Este modelo, por tanto, nos ha permitido resolver el problema de dispersión múltiple considerando todos los órdenes de acoplamiento. Así pues, a través de la definición de la sección eficaz, se ha elaborado un mapa de dispersión que caracteriza los distintos regímenes acústicos de la nube de burbujas. Este mapa, el cual abarca un amplio rango de fracciones de vacío y frecuencias de excitación, muestra de forma clara la zona de dispersión acústica asociada a comportamientos colectivos. Este resultado establece, por tanto, que los regímenes de dispersión resonante se dan para las frecuencias propias correspondientes a los modos de oscilaciones colectivas. Los cálculos numéricos para la sección eficaz de dispersión de la nube han sido validados finalmente por resultados analíticos obtenidos en base a la Teoría del Medio Efectivo.

Bibliografía

- [Foldy (1945)] L. Foldy, “The multiple scattering of waves.” *Physical Review*, vol. 67(3), pp. 107 – 119 (1945)
- [Lax (1951)] M. Lax, “Multiple scattering of waves.” *Revs. Mod. Phys.*, vol. 23, pp. 287 – 310 (1945)
- [Twersky (1962)] V. Twersky, “Multiple scattering of waves and optical phenomena.” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 52, pp. 145 – 171 (1962)
- [Anderson (1950)] V. C. Anderson, “Sound scattering from a fluid sphere.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 22, pp. 426 – 431 (1950)
- [Leighton (1994)] T.G. Leighton, *The acoustic bubble*, Academic Press, London, 1994
- [Ye (1998)] Z. Ye & A. Alvarez “Acoustic localization in bubbly liquid media” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80(16), pp. 3503 – 3506 (1998)
- [Wang (2001)] K. Wang & Z. Ye, “Acoustic pulse propagation and localization in bubbly water.” *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 0566071 – 0566079 (2001)
- [Haïat (2011)] G. Haïat, R. Berti, B. Galaz, N. Taulier, J.J. Amma & W. Urbach, “Two-dimensional simulation of linear wave propagation in a suspension of polymeric microcapsules used as ultrasound contrast agents.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 129(3), pp. 1642 – 1652 (2011)
- [Fuster (2011)] D. Fuster & T. Colonius, “Modelling bubble clusters in compressible liquids.” *J. Fluid Mech.*, vol. 688, pp. 352 – 389 (2011)
- [Zeravcic (2011)] Z. Zeravcic, D. Lohse & W. van Saarloos, “Collective oscillations in bubble clouds.” *J. Fluid Mech.*, vol. 680, pp. 114 – 149 (2011)
- [Bremond (2006)] N. Bremond, M. Arora, C.D. Ohl & D. Lohse, “Controlled multibubble surface cavitation.” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, pp. 2245011 – 2245014 (2006)
- [Arora (2007)] M. Arora, C.D. Ohl & D. Lohse, “Effect of nuclei concentration on cavitation cluster dynamics.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 121(6), pp. 3432 – 3436 (2007)
- [Ida (2002)] M. Ida, “A characteristic frequency of two mutually interacting gas bubbles in an acoustic field.” *Phys. Lett. A*, vol. 297, pp. 210-217 (2002)
- [Skaropoulos (2003)] N. Skaropoulos, H. Yagridou & D. Chrissoulidis, “Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 113(6), pp. 3001 – 3011 (2003)
- [Hahn (2007)] T. Hahn, “Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 122(6), pp. 3252 – 3267 (2007)
- [Parralles (2011)] M.A. Parralles, M. Perez-Saborid & J.M. Fernandez, “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: focusing effect and refraction.” *Am. J. Phys.*, vol. 79(4), pp. 401 – 408 (2011)

- [Omta (1987)] R. Omta, “Oscillations of a cloud of buubbles of small and not so small amplitude.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 82(3), pp. 1018 – 1033 (1987)
- [d’Agostino (1988)] L. d’Agostino & C. Brennen, “Acoustical absorption and scattering cross sections of spherical bubble clouds.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 84(6), pp. 2126 – 2134 (1988)
- [d’Agostino (1989)] L. d’Agostino & C. Brennen, “Linearized dynamics of spherical bubble clouds.” *J. Fluid Mech.*, vol. 199, pp. 155 – 176 (1989)
- [Wood (1932)] A.B. Wood, *A Textbook of Sound*, Bell, London, 1932
- [Wijngaarden (1968)] L. van Wijngaarden, “On the equations of motion of mixtures of liquid and gas bubbles.” *J. Fluid Mech.*, vol. 33, pp. 464 – 474 (1968)
- [Silberman (1957)] E. Silberman, “Sound velocity and attenuation in bubbly mixtures measured in standing wave tubes.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 29, pp. 925 – 933 (1957)
- [Wijngaarden (1972)] L. van Wijngaarden, “One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles.” *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 4, pp. 369 – 396 (1972)
- [Caffisch (1985)] R. Caffisch, M. Miksis, G. Papanicolaou & L. Ting, “Effective equations for wave propagation in bubbly liquids.” *J. Fluid Mech.*, vol. 153, pp. 259 – 273 (1985)
- [Prosperetti (1988)] A. Prosperetti, L. Crum & K. Commander, “Nonlinear bubble dynamics.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83(2), pp. 502 – 514 (1988)
- [Commander (1989)] K. Commander & A. Prosperetti, “Linear pressure waves in bubbly liquids: comparison between theory and experiments.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 85(2), pp. 732 – 746 (1989)
- [Yoon (1991)] S. Yoon, L. Crum, A. Prosperetti & N. Lu, “An investigation of the collective oscillations of a bubble cloud.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 89(2), pp. 700 – 706 (1991)
- [Roy (1992)] R. Roy, W. Carey, M. Nicholas, J. Schindall & L. Crum, “Low-frequency scattering from submerged bubble clouds.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 92(5), pp. 2993 – 2996 (1992)
- [Sarkar (1993)] K. Sarkar & A. Prosperetti, “Backscattering of underwater noise by bubble clouds.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 93(6), pp. 3128 – 3138 (1993)
- [Sarkar (1994)] K. Sarkar & A. Prosperetti, “Coherent and incoherent scattering by oceanics bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 96(1), pp. 332 – 341 (1994)
- [Feuillade (1995)] C. Feuillade, “Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 98(2), pp. 1178 – 1190 (1995)
- [Feuillade (1996)] C. Feuillade, “The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 99(6), pp. 3412 – 3430 (1996)

- [Henye (1999)] F. Henye, “Corrections to Foldy’s effective medium theory for propagation in bubble clouds and other collections of very small scatterers.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 105(4), pp. 2149 – 2154 (1999)
- [Williams (1999)] E.G. Williams, *Fourier acoustics: sound radiation and nearfield acoustical holography*, Academic Press, Washington DC, 1999
- [Kargl (2002)] S. Kargl, “Effective medium approach to linear acoustics in bubbly liquids.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 111(1), pp. 168 – 173 (2002)
- [Wu (1962)] T. Wu & T. Ohmura, *Quantum Theory of Scattering*, Prentice Hall, 1962
- [Morse (1968)] P.M. Morse & K.U. Ingard, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, Inc., Princeton, 1962
- [Landau (1958)] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*, Elsevier Science, Oxford, 1958
- [Leroy (2008)] V. Leroy, A. Strybulevych, J. Page & M. Scanlon, “Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123(4), pp. 1931 – 1940 (2008)
- [Leroy (2009)] V. Leroy, A. Strybulevych, M. Scanlon & J. Page, “Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles.” *Eur. Phys. J. E*, vol. 29, pp. 123 – 130 (2009)

Capítulo 6

Fuerzas de Bjerknes en nubes de microburbujas

El comportamiento real de las burbujas dentro de una nube puede llegar a ser muy complejo debido a que sus posiciones relativas varían como efecto de la excitación acústica. Las fuerzas que inducen este movimiento se conocen como fuerzas de Bjerknes, las cuales han sido analizadas de forma teórica. Por otro lado, se ha estudiado la interacción mutua entre pares de burbujas con el fin de calcular numéricamente el movimiento relativo entre ellas, y explicar los fenómenos asociados que tienen lugar. Por último, se ha implementado un algoritmo que predice la formación de agrupaciones (*clustering*) de burbujas en nubes excitadas acústicamente, fenómeno ampliamente observado en experimentos.

6.1. Introducción

En el estudio de la dinámica lineal acoplada y de la propagación de ondas en nubes de microburbujas, es común asumir que las posiciones de estas en el espacio son estáticas. Esto está justificado debido a que la velocidad de propagación del sonido es mucho mayor que la del posible movimiento traslacional neto de las burbujas. De esta manera, se puede considerar que la nube permanece congelada durante el lapso de tiempo en que ocurren los fenómenos de acoplamiento dinámico y dispersión acústica asociados. No obstante, se observa en la práctica que, incluso para excitaciones de corta duración, las burbujas se pueden desplazar distancias del orden de su propio tamaño. Esto hace que la configuración espacial de la nube evolucione en el tiempo a medida que es irradiada, llegándose a formar agrupaciones o *clustering* de burbujas bajo determinadas condiciones [Leighton (1994), Reddy (2002), Pelekasis (2004)]. La naturaleza de las fuerzas que originan estos desplazamientos, y la dinámica de los movimientos asociados, serán objeto de análisis en este capítulo.

La existencia de perturbaciones de origen acústico en los alrededores de una burbuja hace que esta, en primera instancia, realice oscilaciones radiales debido al desequilibrio entre su presión interna y la presión del medio que la rodea. Como consecuencia, y debido a los mecanismos de reradiación acústica, esta burbuja generará a su vez una nueva perturbación asociada al movimiento de su contorno. Todas estas perturbaciones, por tanto, crean en el medio unos gradientes de presión tales que, al incidir sobre la superficie de las burbujas, les infieren una fuerza conocida como fuerza de radiación

[Leighton (1994), Doinikov (1997)]. Dependiendo de la naturaleza de la onda de presión que alcance a una burbuja, podemos definir dos tipos de fuerza de radiación: (a) la fuerza de radiación primaria es la creada por la onda primaria, u onda de excitación externa p_a , mientras que (b) la fuerza de radiación secundaria es la creada por la onda secundaria, u onda dispersada p_s , generada por las burbujas vecinas. Ambas fuerzas, debido al desfase temporal entre la variación del gradiente de presiones instantáneo, y el volumen de la burbuja durante sus oscilaciones, tienen una componente oscilatoria con promedio no nulo generalmente [Blake (1949), Crum (1975)]. Esto hace que la burbuja se desplace de su posición de origen siguiendo un movimiento de vaivén, con una celeridad que depende de su tamaño de equilibrio, la frecuencia y amplitud de la excitación, los tamaños y posiciones de las burbujas vecinas, y de las propiedades del medio en el que se encuentra [Toilliez (2008)]. Al resultado promedio de las fuerzas de radiación se le denomina fuerza de Bjerknes primaria y secundaria respectivamente, y serán las responsables de la traslación neta de las burbujas cuando son excitadas acústicamente [Bjerknes (1906)].

6.2. Teoría clásica de las fuerzas de Bjerknes

La existencia de perturbaciones de origen acústico en los alrededores de una población de N burbujas da lugar a las llamadas fuerzas de radiación, las cuales provocan un eventual movimiento relativo entre estas [Doinikov (1997)]. Efectivamente, si el campo de presión acústica total se expresa como la superposición entre la onda de excitación externa y la onda dispersada por la nube, es decir, $p = p_a + \sum_{i=1}^N p_{si}$, la fuerza de radiación total \mathbf{F}_{Ri} sobre la burbuja i se escribe

$$\mathbf{F}_{Ri} = - \int_{S_i} p \mathbf{n} d\sigma_i = - \int_{V_i} \nabla p d\tau_i \simeq -V_i \nabla p_a|_i - \sum_{j \neq i}^N V_i \nabla p_{sj}|_i, \quad (6.1)$$

donde S_i es la superficie de la burbuja en cuestión, con \mathbf{n} la normal externa, y V_i es su volumen. Nótese que, al considerar longitudes de onda λ mucho más grande que el tamaño de las burbujas, los gradientes de presión acústica tendrán un valor aproximadamente constante en los alrededores de estas [Leighton (1994)]. Observando el resultado anterior, podemos identificar la fuerza de radiación primaria sobre la burbuja i como $\mathbf{F}_{Ri}^{(1)} = -V_i \nabla p_a|_i$, y la fuerza de radiación secundaria, debido a la interacción con la burbuja j , como $\mathbf{F}_{Rij}^{(2)} = -V_i \nabla p_{sj}|_i$. Obviamente, la fuerza de radiación secundaria total será la suma vectorial de todas las interacciones con el resto de burbujas presentes en la nube, es decir, $\mathbf{F}_{Ri}^{(2)} = \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{Rij}^{(2)} = - \sum_{j \neq i}^N V_i \nabla p_{sj}|_i$.

6.2.1. Fuerza primaria de Bjerknes

La fuerza primaria de Bjerknes sobre la burbuja i dentro de una nube se define como el promedio temporal, a lo largo de un periodo de oscilación, de la fuerza de radiación primaria. Esta fuerza viene dada por $\mathbf{F}_{Ri}^{(1)} = -V_i \nabla p_a|_i$, donde V_i es el volumen instantáneo de la burbuja, y $\nabla p_a|_i$ es el gradiente de presión, evaluado en la posición de esta, debido a la onda de excitación externa. Por tanto, la fuerza de primaria de Bjerknes será

$$\mathbf{F}_{Bi}^{(1)} = - \langle V_i \nabla p_a|_i \rangle, \quad (6.2)$$

donde $\langle f(t) \rangle = T^{-1} \int_0^T f(t) dt$, representa la operación de promediado, con $T = 2\pi/\omega_o$ el periodo de la excitación. Si el campo acústico asociado a la excitación externa viene dado por la onda plana $p_a = P_a \cos(kz - \omega_o t)$, la cual se propaga a lo largo del eje z , el gradiente de presión, evaluado en la posición de la burbuja i , será simplemente

$$\nabla p_a|_i = -P_a k \sin(kz_i - \omega_o t) \mathbf{u}_z. \quad (6.3)$$

Por otro lado, si asumimos oscilaciones de pequeña amplitud, el volumen instantáneo se puede linealizar como $V_i = V_{oi}(1 + 3X_i)$, siendo $V_{oi} = 4\pi R_{oi}^3/3$ el volumen de equilibrio. En consonancia con la excitación, estas oscilaciones seguirán una evolución tal que $X_i = \varepsilon_i \cos(kz_i + \phi_i - \omega_o t)$, con $\varepsilon_i = |\dot{X}_i| \ll R_{oi}$ la amplitud y ϕ_i la fase de las oscilaciones. Substituyendo estas expresiones en la definición de la fuerza primaria de Bjerknes llegamos a

$$\mathbf{F}_{Bi}^{(1)} = 4\pi P_a k R_{oi}^3 \langle X_i \sin(kz_i - \omega_o t) \rangle \mathbf{u}_z, \quad (6.4)$$

donde se ha asumido que $\langle \sin(kz_i - \omega_o t) \rangle = 0$. Efectuando la operación de promediado escribimos finalmente

$$\mathbf{F}_{Bi}^{(1)} = -2\pi P_a k R_{oi}^3 \varepsilon_i \sin \phi_i \mathbf{u}_z. \quad (6.5)$$

Observamos que esta fuerza siempre tiene la dirección de la propagación de la onda externa. Su magnitud depende tanto de la amplitud de las oscilaciones, como de la fase de estas con respecto a la excitación [Eller (1968)].

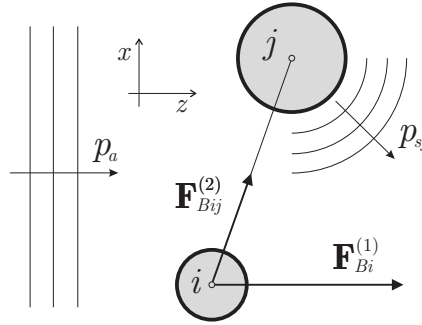


Figura 6.1: Esquema de las fuerzas primarias $\mathbf{F}_{Bi}^{(1)}$ y secundarias $\mathbf{F}_{Bij}^{(2)}$ de Bjerknes sobre la burbuja i .

En el caso más sencillo de una única burbuja aislada, el resultado de la dinámica de las oscilaciones será simplemente $\hat{X} = -P_a[(\omega_n/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma]^{-1}/\rho_\infty \omega_o^2 R_o^2$, con lo que la fuerza primaria de Bjerknes resulta

$$\mathbf{F}_B^{(1)} = \frac{2\pi P_a^2 k R_o}{\rho_\infty \omega_o^2} \frac{\Gamma \mathbf{u}_z}{\left[(\omega_n/\omega_o)^2 - 1\right]^2 + \Gamma^2}, \quad (6.6)$$

la cual tiene siempre sentido positivo a lo largo del eje de propagación [Leighton (1994)]. Se observa en la Fig. 6.2 que el módulo de esta fuerza se maximiza para una frecuencia de excitación igual a la frecuencia natural de la burbuja ω_n . Como revela esta expresión, la existencia de la fuerza primaria de Bjerknes se debe a la presencia de amortiguamiento. Si la burbuja careciese de mecanismos de disipación y reradiación, sus oscilaciones estarían siempre en fase o en anti-fase con respecto a la excitación, haciendo que el promedio de la fuerza de radiación primaria sea nulo.

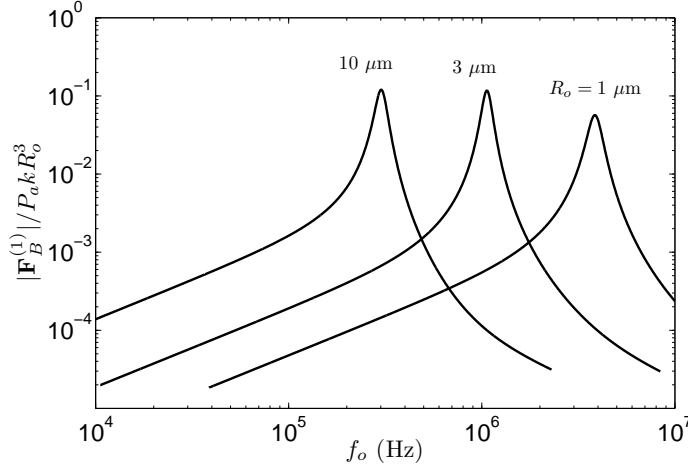


Figura 6.2: Espectro de la fuerza primaria de Bjerknes $\mathbf{F}_B^{(1)}$ sobre una burbuja aislada de radio $R_o = 1, 3$ y $10 \mu\text{m}$.

6.2.2. Fuerza secundaria de Bjerknes

De forma análoga a la fuerza primaria, la fuerza secundaria de Bjerknes sobre la burbuja i provocada por la burbuja j , se define como el promedio temporal de la fuerza de radiación secundaria asociada. Esta fuerza viene dada por $\mathbf{F}_{Rij}^{(2)} = -V_i \nabla p_{sj}|_i$, donde $\nabla p_{sj}|_i$ es el gradiente de presión, evaluado en la posición de la burbuja i , debido a la onda dispersada por la burbuja j . De esta manera, la fuerza secundaria de Bjerknes es

$$\mathbf{F}_{Bij}^{(2)} = -\langle V_i \nabla p_{sj}|_i \rangle. \quad (6.7)$$

Como sabemos, la onda de presión que dispersa una burbuja se puede poner en función de sus oscilaciones radiales [Leighton (1994)]. Si la burbuja i está situada en la posición marcada por \mathbf{r}_i , la presión dispersada medida en el punto \mathbf{r} se expresa

$$p_{si} = \frac{\rho_\infty}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \left[R_i^2(\tau_i) \ddot{R}_i(\tau_i) + 2R_i(\tau_i) \dot{R}_i^2(\tau_i) \right] - \frac{\rho_\infty}{2} \frac{R_i^4 \dot{R}_i^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^4}, \quad (6.8)$$

donde $\tau_i = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|/c_\infty$ es el tiempo retardado. Asumiendo oscilaciones de pequeña amplitud alrededor del radio de equilibrio, la expresión anterior se puede linealizar como $p_{si} = \rho_\infty R_{oi}^3 \ddot{X}_i(\tau_i)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. Por lo tanto, considerando nuevamente oscilaciones monocromáticas de la forma $X_i = \varepsilon_i \cos(kz_i + \phi_i - \omega_o t)$, podemos escribir el gradiente de presión, evaluado en la posición de la burbuja j , como

$$\nabla p_{sj}|_j = \rho_\infty \omega_o^2 R_{oj}^3 \frac{\varepsilon_i}{r_{ij}^2} [\cos(\varphi_i + kr_{ij} - \omega_o t) + kr_{ij} \sin(\varphi_i + kr_{ij} - \omega_o t)] \mathbf{u}_{ij}, \quad (6.9)$$

donde hemos definido el ángulo de fase generalizado $\varphi_i = kz_i + \phi_i$. El término \mathbf{u}_{ij} representa el versor en la dirección del vector que une la burbuja i con la j , las cuales están separadas una distancia $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$. Substituyendo esta expresión, junto con la del volumen linealizado, en la definición de fuerza secundaria de Bjerknes, se llega a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Bij}^{(2)} &= 4\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_{oi}^3 R_{oj}^3 \frac{\varepsilon_j}{r_{ij}^2} \times \\ &\times [\langle X_i \cos(\varphi_j + kr_{ij} - \omega_o t) \rangle + kr_{ij} \langle X_i \sin(\varphi_j + kr_{ij} - \omega_o t) \rangle] \mathbf{u}_{ij}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Finalmente, efectuando la operación de promediado sobre los dos términos de la expresión anterior, escribimos esta fuerza como

$$\mathbf{F}_{Bij}^{(2)} = 2\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_{oi}^3 R_{oj}^3 \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j}{r_{ij}^2} (\cos \Phi_{ij} - kr_{ij} \sin \Phi_{ij}) \mathbf{u}_{ij}, \quad (6.11)$$

donde se ha definido $\Phi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j - kr_{ij}$ como la diferencia de fase total entre las dos burbujas, la cual juega un papel fundamental a la hora de establecer el sentido de la fuerza. En la forma original de esta teoría, las oscilaciones de las burbujas se encuentran desacopladas [Bjerknes (1906), Crum (1975)]. Sin embargo, para tener en cuenta las interacciones que se producen en una nube con una densidad relativamente alta, la amplitud ε_i y fase ϕ_i de las oscilaciones de cada burbuja se deben obtener a partir del sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica acoplada [Zabolotskaya (1984)]. Nótese que este resultado es generalmente válido para valores de kr_{ij} arbitrariamente grandes, por lo que recoge los efectos de las interacciones acústicas de largo alcance [Doinikov (1997)]. No obstante, su aplicabilidad se limita únicamente al caso de excitaciones de pequeña amplitud.

En el caso en que $kr_{ij} \ll 1$, es decir, cuando la longitud de onda de la excitación es mucho más grande que la separación entre dos burbujas, o lo que es lo mismo, cuando la compresibilidad del medio es lo suficientemente pequeña para que los efectos dinámicos se acoplen de manera instantánea (tiempo de retardo nulo), se tiene que

$$\mathbf{F}_{Bij}^{(2)} = 2\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_{oi}^3 R_{oj}^3 \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j}{r_{ij}^2} \cos(\phi_i - \phi_j) \mathbf{u}_{ij}, \quad (6.12)$$

expresión que se corresponde con la definición clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes para interacciones de corto alcance [Crum (1975)]. Atendiendo al valor de la diferencia de fase de las oscilaciones de las burbujas, podemos decir, en relación al sentido de la fuerza, que:

- si $0 \leq |\phi_i - \phi_j| < \pi/2$, sobre las burbujas actuará una fuerza de atracción,
- si $|\phi_i - \phi_j| = \pi/2$, sobre las burbujas no actuará fuerza alguna,
- si $\pi/2 < |\phi_i - \phi_j| \leq \pi$, sobre las burbujas actuará una fuerza de repulsión.

A continuación, analizaremos las fuerzas secundarias de Bjerknes que actúan entre un par de burbujas, cuyos tamaños, distancia y orientación con respecto a la onda de presión externa p_a se irán variando. El resultado exacto de esta fuerza, representado en (6.11), se comparará con la aproximación dada por la expresión (6.12) en un amplio espectro de frecuencias de excitación. En primer lugar, tenemos dos burbujas monodispersas con un radio $R_o = 3 \mu\text{m}$, las cuales están separadas una distancia r_{ij} y orientadas según el eje x , en el primer caso, y según el eje z (eje de propagación) en el segundo. Como se observa en la Fig. 6.3, la fuerza secundaria es siempre atractiva para valores de $kr_{ij} \ll 1$, ya que ambas burbujas, al ser del mismo tamaño, están oscilando con similar fase, $\phi_i = \phi_j$. Vemos que esta fuerza alcanza un máximo para una frecuencia ligeramente inferior a la frecuencia natural de las burbujas. Esto es debido a que, para valores de r_{ij} lo suficientemente pequeños, la burbujas oscilan de forma acoplada, por lo que la frecuencia de resonancia colectiva tiende a disminuir. Por otro lado, cuando $kr_{ij} > 1$, aparecen zonas en el espectro donde la fuerza secundaria pasa a ser de repulsión. Esta reversión de la fuerza es consecuencia de la diferencia de fase debida a

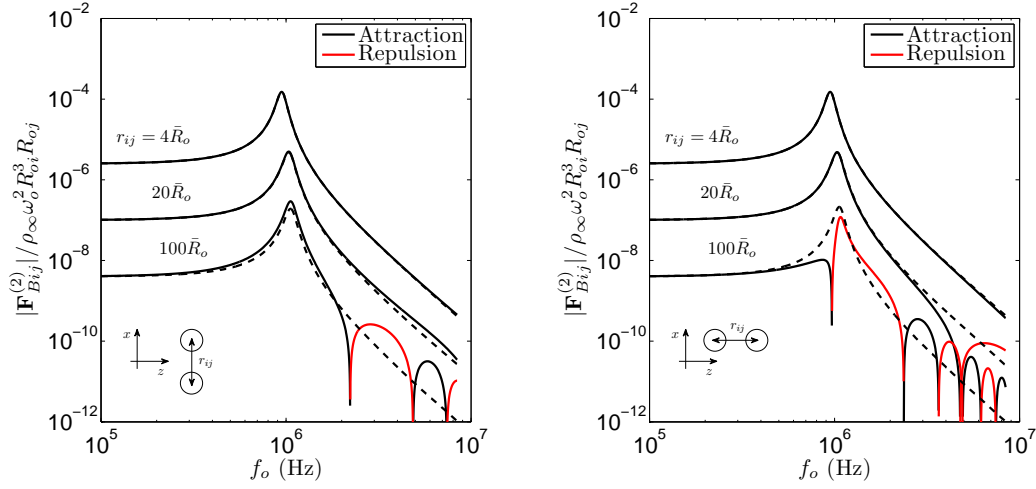


Figura 6.3: Espectro de la fuerza secundaria de Bjerknes $\mathbf{F}_{Bij}^{(2)}$ sobre burbujas del mismo tamaño: $R_{oi} = R_{oj} = 3 \mu\text{m}$. Se han considerado distintos valores de la distancia de separación r_{ij} . Las curvas rayadas representan la aproximación de corto alcance, válida para $kr_{ij} \ll 1$.

la localización espacial de las burbujas dentro del campo acústico, siendo por tanto un efecto de largo alcance [Doinikov (1997)]. Como se comprueba, la orientación del par de burbujas con respecto al eje de propagación tiene un importante impacto en estas condiciones: cuanto más orientado esté el sistema, más zonas de repulsión aparecen en el espectro de la fuerza secundaria, las cuales pueden llegar a ser dominantes.

En segundo lugar estudiaremos el caso de un par de burbujas de distinto tamaño, con un radio medio $\bar{R}_o = 3 \mu\text{m}$. En el primer caso, las burbujas tienen un radio $R_{oi} = 2 \mu\text{m}$ y $R_{oj} = 4 \mu\text{m}$. Como vemos en la Fig. 6.4, para valores de $kr_{ij} \ll 1$ la fuerza secundaria es atractiva para excitaciones tanto de baja como de alta frecuencia. Sin embargo, en la zona central del espectro, donde $\omega_{nj} < \omega_o < \omega_{ni}$, aparece una fuerza secundaria de repulsión debido a que la diferencia de fase alcanza valores tales que $|\phi_i - \phi_j| > \pi/2$. Obsérvese que, debido al acoplamiento dinámico entre las burbujas, la banda de frecuencias que ocupa la zona de repulsión central varía notablemente a medida que la distancia de separación disminuye [Zabolotskaya (1984), Ida (2005)]. Al igual que en el caso monodisperso, en cuanto $kr_{ij} > 1$ tienden a aparecer en el espectro efectos de reversión, debido a la interacción de largo alcance, de la fuerza secundaria, los cuales se incrementan a medida que el sistema se orienta con respecto a la propagación. Finalmente, si tenemos un par de burbujas de radios $R_{oi} = 1 \mu\text{m}$ y $R_{oj} = 5 \mu\text{m}$, observamos que el ancho de banda de la zona de repulsión central, presente para condiciones de $kr_{ij} \ll 1$, se ve incrementada. Esto se debe a que la diferencia de tamaños, y en consecuencia, la diferencia entre sus frecuencias naturales, es mayor.

6.3. Interacción mutua entre pares de burbujas

En esta sección analizaremos las fuerzas de interacción mutua y el movimiento relativo entre dos burbujas con radios de equilibrio $R_{o1} < R_{o2}$. Asumiremos que la burbuja pequeña tiene total libertad de movimiento, evolucionando de acuerdo a los diferentes campos de fuerzas que pueden aparecer en el medio. En contraste, la burbuja grande

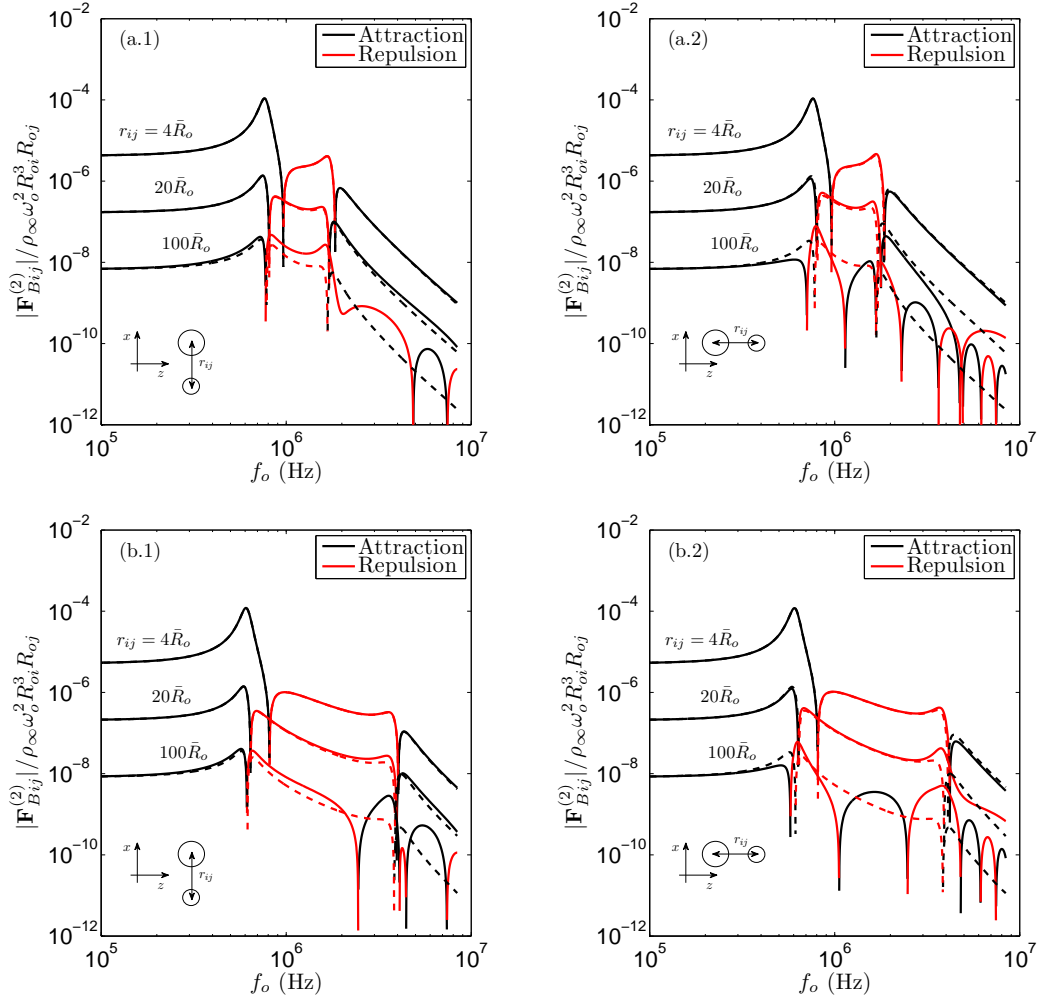


Figura 6.4: Espectro de la fuerza secundaria de Bjerknes $\mathbf{F}_{Bij}^{(2)}$, sobre burbujas de distinto tamaño: (a) $R_{oi} = 2 \mu\text{m}$, $R_{oj} = 4 \mu\text{m}$. (b) $R_{oi} = 1 \mu\text{m}$, $R_{oj} = 5 \mu\text{m}$. Se han considerado distintos valores de la distancia de separación r_{ij} . Las curvas rayadas representan la aproximación de corto alcance, válida para $kr_{ij} \ll 1$.

está fija en un determinado punto, evitando así cualquier tipo de movimiento traslacional [Yoshida (2011)]. Un transductor piezoeléctrico emitirá una onda acústica monocromática de pequeña amplitud $P_a \ll p_\infty$, y de frecuencia $\omega_o = 2\pi f_o$, haciendo que ambas burbujas realicen oscilaciones radiales siempre que la longitud de onda cumpla $\lambda \gg R_{o2}$. Los gradientes de presión debido a las ondas primarias y secundarias darán lugar a las fuerzas de radiación, y eventualmente a las fuerzas de Bjerknes. Por tanto, la burbuja pequeña se moverá según en balance entre las fuerzas másicas, las fuerzas de radiación, y el resto de fuerzas que se desarrollan durante el movimiento.

6.3.1. Oscilaciones lineales acopladas

La primera etapa de nuestro problema será plantear las ecuaciones que modelan las oscilaciones acopladas de ambas burbujas [Zabolotskaya (1984), Doinikov (1995)]. Consideraremos, en primer lugar, que la separación D entre los centros de las burbujas

es lo suficientemente pequeña como para evitar efectos de retardo en el acoplamiento debido a la compresibilidad del medio. Rigurosamente hablando, se requiere entonces que $kD \ll 1$, por lo que los fenómenos de interacción de largo alcance serán ignorados. Dada la débil intensidad de la excitación acústica, las burbujas realizarán oscilaciones de pequeña amplitud, lo que justifica la hipótesis que establece la conservación de la simetría radial incluso para distancias de separación muy pequeñas [Yoshida (2011)]. A continuación, linealizaremos la ecuación para la dinámica de las oscilaciones de cada burbuja haciendo $R = R_o(1+X)$, con $|X| \ll 1$. En consecuencia se obtiene (ver Capítulo 5),

$$\ddot{X}_1 + 2d_1\dot{X}_1 + \omega_{n1}^2 X_1 = -\frac{p_a}{\rho_\infty R_{o1}^2} - \frac{R_{o2}^3}{R_{o1}^2} \frac{\ddot{X}_2}{D}, \quad (6.13)$$

$$\ddot{X}_2 + 2d_2\dot{X}_2 + \omega_{n2}^2 X_2 = -\frac{p_a}{\rho_\infty R_{o2}^2} - \frac{R_{o1}^3}{R_{o2}^2} \frac{\ddot{X}_1}{D}, \quad (6.14)$$

donde la presión en los alrededores de ambas burbujas, debida a la excitación acústica externa u onda primaria, será $p_a = P_a \exp(-i\omega_o t)$. Nótese que, dada la condición $kD \ll 1$, las dos burbujas perciben, aproximadamente, una misma presión acústica. Este sistema puede ser resuelto si tomamos soluciones oscilatorias de la forma $X = \hat{X} \exp(-i\omega_o t)$, donde $\hat{X} = \varepsilon \exp(i\phi)$ es la amplitud compleja, siendo ε y ϕ la amplitud y la fase de las oscilaciones respectivamente. Por tanto,

$$\hat{X}_1 = \frac{-1}{(\omega_{n1}/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma_1} \left(\frac{P_a}{\rho_\infty \omega_o^2 R_{o1}^2} - \frac{R_{o2}^3}{R_{o1}^2} \frac{\hat{X}_2}{D} \right), \quad (6.15)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{-1}{(\omega_{n2}/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma_2} \left(\frac{P_a}{\rho_\infty \omega_o^2 R_{o2}^2} - \frac{R_{o1}^3}{R_{o2}^2} \frac{\hat{X}_1}{D} \right). \quad (6.16)$$

Es fácil de comprobar que, para distancias de separación lo suficientemente grandes, se recupera la solución para las oscilaciones lineales en un sistema desacoplado.

Para este análisis, nos restringiremos a las condiciones paramétricas de los experimentos llevados a cabo por Yoshida et al. (ver Fig. 6.5), en los cuales dos burbujas, con radios $R_{o1} \ll R_{o2}$, son excitadas por una onda estacionaria de amplitud $P_a = 3$ kPa y frecuencia $f_o = 27$ kHz [Yoshida (2011)]. El tamaño de la burbuja grande es tal que $\omega_o \sim \omega_{n2}$, es decir, su tamaño satisface $R_{o2}/R_n \sim 1$, donde $R_n \simeq 120 \mu\text{m}$ es el radio resonante. En consecuencia, la frecuencia de resonancia de la burbuja pequeña será $\omega_{n1} \gg \omega_o$. Por tanto, mientras que esta burbuja está excitada a una muy baja frecuencia relativa, la grande estará oscilando siempre muy cerca de su régimen resonante. Como veremos, estas condiciones nos permitirán romper el acoplamiento de la burbuja grande incluso para pequeñas distancias de separación. Efectivamente, el término de acoplamiento en la ecuación (6.16) podrá ser despreciado para $D \sim R_{o2}$ dado que $P_a \gg 3\gamma p_\infty \varepsilon_1 (R_{o1}/R_{o2})^3$, donde γ es el coeficiente adiabático del gas dentro de la burbuja. Esto significa, como se esperaba, que la burbuja grande no está siendo prácticamente excitada por la onda secundaria emitida por la pequeña. En cambio, la influencia de las ondas emitidas por la grande sobre las oscilaciones de la burbuja pequeña puede resultar dominante para valores relativamente altos de D . Comprobamos, analizando la ecuación (6.15), que la presión debida a la onda secundaria será del mismo orden que la debida a la primaria cuando $D \sim 3\gamma p_\infty \varepsilon_2 R_{o2}/P_a$.

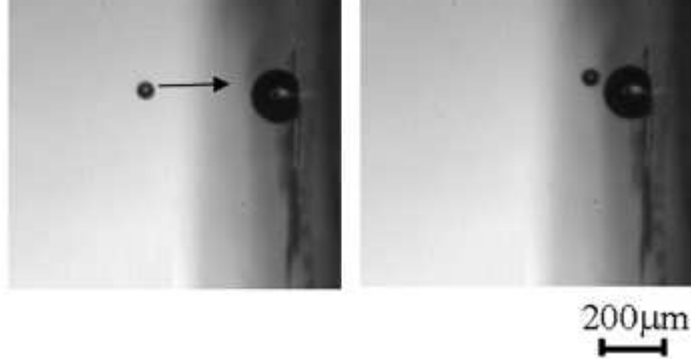


Figura 6.5: Visualización experimental del fenómeno de atracción entre dos burbujas debido a las fuerzas secundarias de Bjerknes. Extraído de Yoshida et al. (2011). La burbuja grande está adherida a una película de polímero de $e_p = 80 \mu\text{m}$ de espesor con el fin de evitar los efectos de imagen ($e_p \ll \lambda$).

Para confirmar cuantitativamente el desacoplamiento parcial del sistema, pasaremos a estimar la amplitud de las oscilaciones ε . La burbuja grande, excitada de forma resonante únicamente por la onda primaria, realizará unas oscilaciones de amplitud $\varepsilon_2 \simeq P_a/3\gamma p_\infty \Gamma_2 \sim 10^{-1}$. Nótese que el coeficiente de amortiguamiento, en la resonancia, toma unos valores típicos de $\Gamma_2 \simeq 0.1$ para los tamaños que nos atañen en el presente problema (ver Capítulo 3). Por otro lado, se ha justificado que las oscilaciones de la burbuja pequeña sí que dependen de la distancia de separación. Por tanto, para distancias $D \gg 10R_{o2}$, podemos comprobar que esta burbuja se desacopla de la grande, con lo que la amplitud de sus oscilaciones valdrá $\varepsilon_1 \simeq P_a/3\gamma p_\infty \sim 10^{-2}$. En cambio, cuando la distancia es $D \ll 10R_{o2}$, la burbuja pequeña está completamente acoplada, de manera que únicamente es excitada por las ondas secundarias provenientes de la burbuja grande. Así pues, su amplitud alcanzará un valor $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2 R_{o2}/D$ en estas condiciones. En consecuencia, se deduce que $\varepsilon_1 \simeq \varepsilon_2$ para distancias de separación muy pequeñas.

6.3.2. Movimiento de traslación

En esta sección se obtendrá la ecuación diferencial que gobierna el movimiento traslacional de la burbuja pequeña con el fin de resolver numéricamente la evolución en el tiempo de la distancia de separación $D(t)$. En primer lugar, tanto las fuerzas de flotación como las fuerzas de radiación primaria podrán ser ignoradas frente a las secundarias para $D \ll \lambda$. De esta manera, estas últimas fuerzas son las únicas que inducen el desplazamiento de la burbuja pequeña. Dado que la fuerza de radiación secundaria estará siempre orientada hacia el centro de la burbuja grande (Fig. 6.1), el movimiento total de la pequeña será unidireccional, siguiendo la línea que conecta a ambas burbujas. A continuación analizaremos de forma separada las distintas fuerzas que tienen lugar durante el movimiento. Aunque la formulación para el cálculo de las oscilaciones acopladas de las burbujas se haya realizado asumiendo dinámica lineal, conservaremos todos los términos no lineales en la definición de las fuerzas con vista a futuros análisis [Maxey (1983)].

Fuerza de radiación secundaria Como se ha visto en la sección anterior, la fuerza de radiación secundaria se expresa como $\mathbf{F}_R = -V_1 \nabla p_{s2}|_1$. El gradiente de presión de la onda secundaria, asumiendo que la burbuja grande está posicionada en el origen, se calculará a partir de la expresión (6.8), donde consideraremos un tiempo de retardo nulo debido a que $\lambda \gg D$. De esta manera, una vez evaluado el gradiente en la posición de la burbuja pequeña, el módulo de esta fuerza resulta

$$F_R = \frac{4}{3} \pi \rho_\infty R_1^3 \left(\frac{R_2^2 \ddot{R}_2 + 2R_2 \dot{R}_2^2}{D^2} - \frac{2R_2^4 \dot{R}_2^2}{D^5} \right). \quad (6.17)$$

Fuerza de inercia virtual En segundo lugar, las fuerzas de inercia virtuales (o de masa añadida) que se desarrollan durante el movimiento, se pueden interpretar como la mitad de la tasa de variación del momento lineal de la masa de fluido que ocuparía el volumen de la burbuja mientras esta se mueve con una velocidad relativa $U = \dot{D} - u_2$. Formalmente, esta fuerza se escribe $F_I = -\frac{1}{2} \rho_\infty d(V_1 U)/dt$. Expresando el volumen de la burbuja como $V_1 = 4\pi R_1^3/3$ y desarrollando la derivada, obtenemos [Maxey (1983), Reddy (2002)]

$$F_I = -\frac{2}{3} \pi \rho_\infty R_1^3 \left(\ddot{D} - \frac{du_2}{dt} \right) - 2\pi \rho_\infty R_1^2 \frac{dR_1}{dt} (\dot{D} - u_2). \quad (6.18)$$

En este caso, la velocidad u_2 es la debida al flujo potencial creado por las oscilaciones de la burbuja grande en los alrededores de la pequeña, con lo cual $u_2 = R_2^2 \dot{R}_2 / D^2$ [Leighton (1994)]. Las derivadas temporales de la velocidad del flujo y del radio de la burbuja deben computarse en el sentido Lagrangiano, es decir, siguiendo su trayectoria. Esto implica, en primer lugar, que $du_2/dt = \partial u_2 / \partial t + \dot{D} \partial u_2 / \partial D$, y por lo tanto

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{R_2^2 \ddot{R}_2 + 2R_2 \dot{R}_2^2}{D^2} - \frac{2R_2^2 \dot{R}_2}{D^3} \dot{D}. \quad (6.19)$$

Por otro lado, la derivada Lagrangiana del radio de la burbuja pequeña será

$$\frac{dR_1}{dt} = \dot{R}_1 + \frac{\partial R_1}{\partial D} \dot{D}. \quad (6.20)$$

Nótese que el término $\dot{D} \partial R_1 / \partial D$ es distinto de cero ya que $R_1 = R_1(t, D)$ debido al acoplamiento de las oscilaciones. El cálculo de la derivada se lleva a cabo asumiendo pequeñas oscilaciones de la forma $R_1 = R_{o1}[1 + \hat{X}_1 \exp(-i\omega_o t)]$, con lo que podemos escribir $\partial R_1 / \partial D = R_{o1}(\partial \hat{X}_1 / \partial D) \exp(-i\omega_o t)$. Haciendo uso de la solución (6.15), obtenemos finalmente

$$\frac{\partial R_1}{\partial D} \dot{D} = \frac{R_{o1}^2}{\omega_o R_{o2}} \left[\dot{R}_2 \text{Im} \Psi_1 - \omega_o (R_2 - R_{o2}) \text{Re} \Psi_1 \right] \frac{\dot{D}}{D^2}, \quad (6.21)$$

donde $\Psi_1 = (R_{o2}/R_{o1})^3 [(\omega_{n1}/\omega_o)^2 - 1 - i\Gamma_1]^{-1}$ es una función compleja relacionada con las oscilaciones de la burbuja pequeña. No obstante, este término puede ser ignorado frente a \dot{R}_1 ya que las variaciones de la posición de la burbuja (vibraciones) durante un periodo de oscilación, aunque rápidas, serán de pequeña amplitud. Efectivamente, si llamamos σ a la amplitud de estas vibraciones, se cumplirá en todo instante

$$\frac{\dot{R}_1}{\dot{D} \partial R_1 / \partial D} \sim \frac{\varepsilon_1 D^2}{\varepsilon_2 \sigma R_{o2}} \gg 1 \quad (6.22)$$

siempre que $\sigma \ll D$. Por tanto asumimos, en primera aproximación, que $dR_1/dt \simeq \dot{R}_1$.

Fuerza de resistencia viscosa Por último, el módulo de la fuerza de resistencia viscosa puede ser expresado como el arrastre de Stokes que sufre la burbuja al moverse con una velocidad relativa $U = \dot{D} - u_s$. Bajo las condiciones paramétricas de nuestro problema, el número de Reynolds basado en la velocidad radial de oscilación es generalmente $Re = \rho_\infty R_{o1} |\dot{R}_1| / \mu_L \gtrsim 1$. Por lo tanto, siguiendo el análisis realizado por Magnaudet et al., la fuerza de resistencia debe ser escrita [Magnaudet (1998)]

$$F_D = -12\pi\mu_L R_1 (\dot{D} - u_2), \quad (6.23)$$

donde la influencia de las fuerzas de historia se han ignorado en este régimen de acuerdo con lo estimado en Yoshida et al. de forma experimental [Yoshida (2011)].

Una vez analizadas todas las fuerzas que intervienen en el problema, la ecuación que gobierna el movimiento de traslación de la burbuja pequeña se puede plantear, según la ley de Newton, como $F_R + F_I + F_D = 0$. Substituyendo las expresiones para cada fuerza obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_1^3 \left(\ddot{D} - \frac{du_2}{dt} \right) + 2\pi\rho_\infty R_1^2 \dot{R}_1 (\dot{D} - u_2) = \\ = \frac{4}{3}\pi\rho_\infty R_1^3 \left(\frac{R_2^2 \ddot{R}_2 + 2R_2 \dot{R}_2^2}{D^2} - \frac{2R_2^4 \dot{R}_2^2}{D^5} \right) - 12\pi\mu_L R_1 (\dot{D} - u_2), \end{aligned} \quad (6.24)$$

Así pues, para cerrar este análisis, la ecuación de movimiento (6.24) debe ser resuelta junto con las ecuaciones (6.13) y (6.14), las cuales modelan la dinámica de las oscilaciones lineales de ambas burbujas. Por consiguiente, tendremos que resolver numéricamente un sistema de tres ecuaciones diferenciales acopladas con el propósito de obtener la evolución temporal de nuestras tres incógnitas: D , R_1 y R_2 . La Fig. 6.6 muestra la

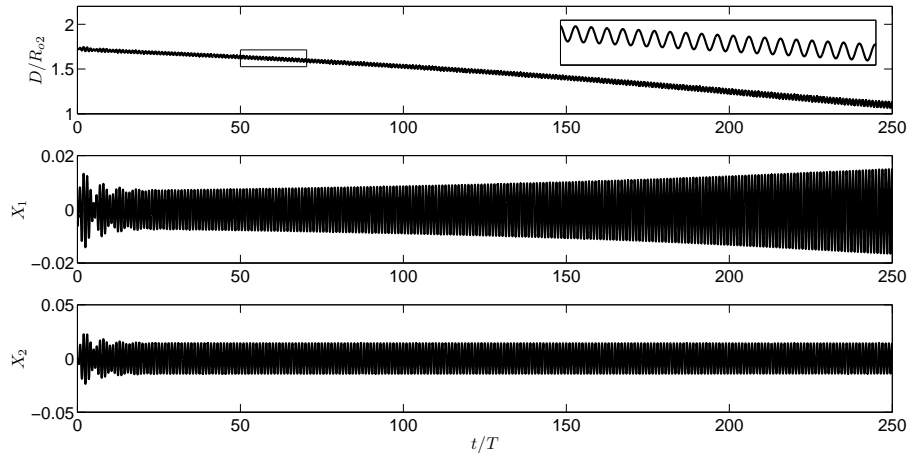


Figura 6.6: Evolución de la distancia de separación D , y de las oscilaciones radiales X_1 y X_2 , para dos burbujas de radios $R_{o1}/R_n = 0.2$ y $R_{o2}/R_n = 1.2$. La distancia de separación inicial es $D_o = 250 \mu\text{m}$, y $T = 2\pi/\omega_o$ es el periodo de la excitación. En el zoom se observa el vaivén, o movimiento vibracional, que sufre la burbuja pequeña durante su traslación.

evolución de la distancia de separación, y de la oscilaciones de cada burbuja. Bajo las condiciones consideradas, la burbuja pequeña se siente atraída por la grande. A medida que la distancia se reduce, sus oscilaciones van aumentando debido a cada vez mayor

acoplamiento acústico. En cambio, la burbuja grande mantiene la amplitud de sus oscilaciones constante e independiente de la distancia de separación, lo que confirma su condición desacoplada. Se observa que, unido a la traslación neta, la burbuja realiza un movimiento de vaivén (vibraciones) con una frecuencia similar a la de la excitación. Como podemos comprobar, la amplitud de estas vibraciones aumenta a medida que la distancia disminuye.

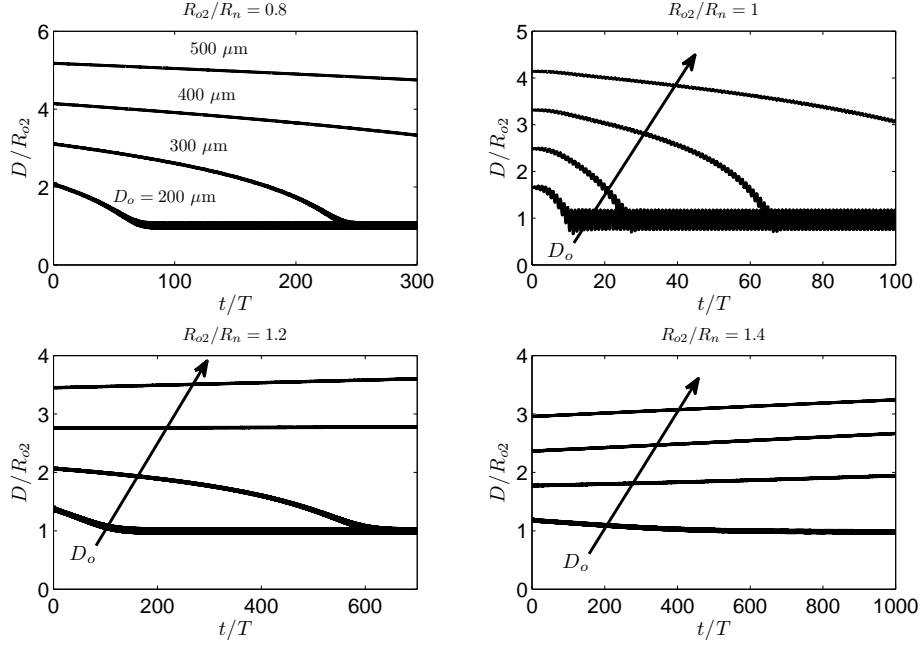


Figura 6.7: Evolución de la distancia de separación D entre un par de burbujas. El radio de la burbuja pequeña es $R_{o1}/R_n = 0.2$, mientras que el de la grande toma valores entre $R_{o2}/R_n = 0.8$ y $R_{o2}/R_n = 1.4$. Cada curva se corresponde a una separación inicial D_o distinta.

En la Fig. 6.7 se representa la evolución de la distancia de separación para varios valores de D_o y R_{o2} . Para $R_{o2}/R_n \leq 1$, la fuerza de interacción será siempre atractiva independientemente de la distancia de separación inicial. Como vemos, la dinámica traslacional sera tanto más rápida cuanto más cerca esté R_{o2} del radio resonante. En cambio, si $R_{o2}/R_n > 1$, la interacción entre las burbujas será generalmente repulsiva. Sin embargo, se observa la aparición de una interacción atractiva por debajo de cierta distancia, la cual supone un punto de equilibrio inestable [Doinikov (1995), Harkin (2001)]. Nótese que la burbuja pequeña, la cual es tratada como una partícula puntual a la hora de analizar su dinámica traslacional, tiende siempre a alcanzar un equilibrio estable en las regiones próximas al contorno de la burbuja grande. Obviamente, este fenómeno carece de significado físico debido a la presencia real de contornos materiales, por lo que el equilibrio alcanzado será ficticio. No obstante, observando la localización de este equilibrio con respecto a R_{o2} , podremos analizar de forma cualitativa la estabilidad de la unión entre ambas burbujas.

A continuación, compararemos la naturaleza de la fuerza de interacción entre las dos burbujas con lo predicho por la teoría clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes. Para ello, se obtendrán numéricamente las distancias de equilibrio D_* usando la formulación completa para la dinámica traslacional de la burbuja pequeña. Estos puntos

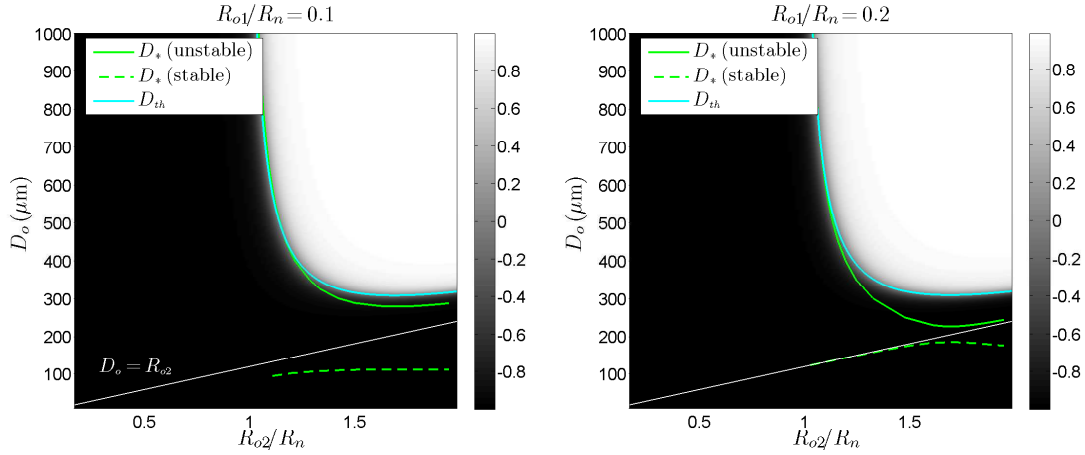


Figura 6.8: Naturaleza de la interacción mutua entre pares de burbujas. El mapa de colores indica el valor $\cos(\phi_1 - \phi_2)$ calculado mediante la teoría clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes. La curva azul, la cual separa la región atractiva (negro) de la repulsiva (blanco), se corresponde con la distancia de equilibrio inestable D_{th} predicha por esta teoría. Las curvas verdes representan las posiciones de equilibrio estable e inestable D_* predichas por la formulación completa para la dinámica traslacional.

de equilibrio marcarán, por tanto, la frontera entre la naturaleza atractiva y repulsiva de la interacción. En la Fig. 6.8 vemos que, para valores pequeños de R_{o1} , las zonas de atracción y de repulsión en el plano $D_o - R_{o2}$ predichas por ambas formulaciones coinciden. Si $R_{o2}/R_n < 1$, la diferencia de fase de las oscilaciones será prácticamente nula, de manera que las burbujas siempre se atraerán. En cambio, cuando $R_{o2}/R_n > 1$, esta diferencia de fase dependerá de la distancia de separación. Para valores $D_o > D_{th}$, las burbujas oscilan con fases muy dispares, lo que hace que la fuerza secundaria de Bjerknes sea repulsiva. Sin embargo, para $D_o < D_{th}$, las fases se igualan debido al acoplamiento acústico, por lo que la fuerza secundaria se vuelve atractiva [Zabolotskaya (1984), Doinikov (1995), Ida (2002)]. A medida que el tamaño de la burbuja pequeña aumenta, se observa cierta divergencia entre las predicciones de ambas teorías. Mientras que las predicciones de la teoría clásica permanecen inalteradas, las de la formulación completa para la dinámica traslacional amplían la zona de repulsión para valores de D_o por debajo de D_{th} , llegando a cubrir todo el dominio a partir de $R_{o2}/R_n > 1.6$ aproximadamente. Bajo estas condiciones, si la burbuja pequeña está muy cerca de la grande, la interacción resulta siempre repulsiva y no atractiva como establece el signo de la fuerza secundaria de Bjerknes. Esto sugiere una reversión de la fuerza interacción entre las burbujas en esta región, provocada presuntamente por la acción no despreciable de fuerzas hidrodinámicas.

Por otro lado, observamos en la Fig. 6.8 que la rama estable de la posición de equilibrio D_* se sitúa muy cerca del contorno de la burbuja grande para valores $R_{o2}/R_n < 1.6$ en el caso $R_{o1}/R_n = 0.2$. Como vemos, el equilibrio estable, provocado por las fuerzas hidrodinámicas presentes a distancias cortas, no es predicho por la teoría clásica. La proximidad de esta posición a R_{o2} indica que el contacto físico entre ambas burbujas daría lugar a una unión relativamente débil. Ante esta situación, la presencia de cualquier otro campo de fuerzas espúreo lo suficientemente intenso, como el generado por el *microstreaming* [Elder (1959), Marmottant (2006), Tho (2007)], podrá desplazar la

burbuja pequeña hacia una nueva posición de equilibrio algo más alejada, lo que explica la formación de parejas estables levemente distanciadas [Yoshida (2011)]. Por el contrario, cuando el equilibrio estable se sitúa muy por debajo de R_{o2} como ocurre para $R_{o1}/R_n = 0.1$, la unión entre ambas burbujas sería lo suficientemente fuerte como para formar una pareja estable en contacto.

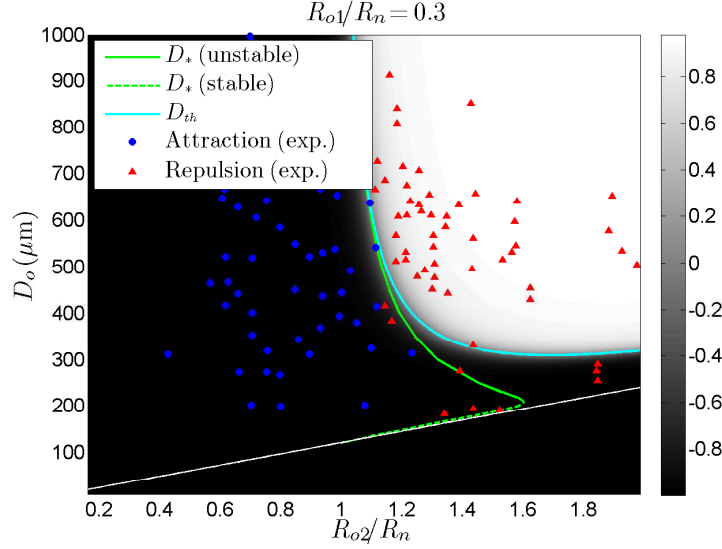


Figura 6.9: Naturaleza de la interacción mutua entre pares de burbujas. Los círculos y los triángulos se corresponden con los resultados experimentales obtenidos por Yoshida et al. para valores $R_{o1}/R_n \simeq 0.2 - 0.4$

Finalmente, se han comparado en la Fig. 6.9 los resultados numéricos con los experimentos llevados a cabo por Yoshida et al. para burbujas de radio $R_{o1}/R_n \sim 0.3$ [Yoshida (2011)]. Como revelan los puntos experimentales situados en $R_{o2}/R_n \simeq 1.8$ para $D_o < D_{th}$, existirá una reversión del signo de la interacción en esta zona, lo cual es predicho por formulación completa para la dinámica traslacional. Se observa, además, la existencia de repulsión alrededor de $R_{o2}/R_n \simeq 1.4$ para distancias $D_o \simeq R_{o2}$: dada la proximidad de la posición de equilibrio estable D_* , la burbuja pequeña puede ser desplazada hacia afuera por el efecto de otros campos de fuerzas no considerados en el presente estudio. Concluimos que la influencia no despreciable de los distintos efectos hidrodinámicos sobre la dinámica traslacional, los cuales no están recogidos en la formulación clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes, es la responsable tanto de la presencia de posibles equilibrios estables, como de la reversión de la fuerza de interacción para distancias de separación muy pequeñas.

Con el fin de estudiar y catalogar la acción de estas fuerzas hidrodinámicas, formularemos la dinámica traslacional de la burbuja pequeña de una forma más amigable usando la composición de movimientos. Así pues, a la vista de los resultados numéricos para la evolución de D , la dinámica del movimiento de la burbuja pequeña se puede descomponer en dos movimientos simples: (a) vibraciones, o movimiento de vaivén, debidas a la naturaleza oscilante de la fuerza instantánea de radiación, y (b) traslación neta debida al promedio no nulo de estas fuerzas a lo largo de un periodo de oscilación.

Movimiento vibracional

Como se espera, el movimiento vibracional de la burbuja pequeña tiene lugar en una escala de tiempo mucho más reducida ($t_o \sim 1/\omega_o$) que la traslación neta [Toilliez (2008)]. Este efecto nos permite desacoplar las vibraciones del movimiento traslacional promedio, lo que implica que la ecuación que gobierna el movimiento vibracional puede ser planteada considerando solamente un periodo de oscilación.

A continuación, asumiremos unas vibraciones Y de pequeña amplitud en torno a la posición media s . De esta manera, el desplazamiento total de la burbuja vendrá dado por $D = s + Y$, siendo $Y \ll s$. En consecuencia, la velocidad y la aceleración total de la burbuja se escriben $\dot{D} = v + \dot{Y}$ y $\ddot{D} = a + \ddot{Y}$ respectivamente. Dado que estamos analizando este movimiento en una escala de tiempo muy pequeña, la variación de la posición media de la burbuja será $\Delta s \ll |Y|$. Esto implica una velocidad media $v \sim \omega_o \Delta s \ll \dot{Y}$, y una aceleración media $a \sim \omega_o^2 \Delta s \ll \ddot{Y}$. Concluimos entonces que la mayor parte de la dinámica traslacional total de la burbuja, a lo largo un periodo de oscilación, se debe al movimiento vibracional. Para escribir la ecuación de movimiento de las vibraciones, linealizaremos hasta términos de primer orden las distintas fuerzas que actúan sobre la burbuja pequeña. Por tanto, la versión linealizada de la fuerza de radiación secundaria resulta

$$F_R = \frac{4}{3} \pi \rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \frac{\ddot{X}_2}{s^2}. \quad (6.25)$$

Por otro lado, la expresión linealizada de la fuerza de inercia virtual será

$$F_I = -\frac{2}{3} \pi \rho_\infty R_{o1}^3 \left(\ddot{Y} R_{o2}^3 - \frac{\ddot{X}_2}{s^2} \right). \quad (6.26)$$

Nótese que los términos relacionados con la derivada temporal del radio de la burbuja han sido despreciados. Por último, la fuerza de resistencia viscosa linealizada se escribe

$$F_D = -12\pi\mu_L R_{o1} \left(\dot{Y} - R_{o2}^3 \frac{\dot{X}_2}{s^2} \right). \quad (6.27)$$

Finalmente, la ecuación diferencial que gobierna el movimiento vibracional de pequeña amplitud se construye haciendo $F_R + F_I + F_D = 0$, con lo cual

$$\ddot{Y} + 9d_{vis1}\dot{Y} = 3R_{o2}^3 \left(\ddot{X}_2 + 3d_{vis1}\dot{X}_2 \right) \frac{1}{s^2}, \quad (6.28)$$

donde $d_{vis1} = 2\mu_L/\rho_\infty R_{o1}^2$ es el factor de amortiguamiento viscoso. Como vemos, esta ecuación tiene una estructura muy similar a la un oscilador armónico amortiguado, el cual es forzado por las oscilaciones de la burbuja grande.

Para resolver la ecuación anterior, asumiremos unas vibraciones monocromáticas de la forma $Y = \hat{Y} \exp(-i\omega_o t)$, siendo $\hat{Y} = \sigma \exp(i\phi_s)$, con σ y ϕ_s la amplitud y la fase. Así pues, substituyendo en (6.28), se obtiene

$$\hat{Y} = 3R_{o2}^3 \left(\frac{1 + 6iRe^{-1}}{1 + 18iRe^{-1}} \right) \frac{\hat{X}_2}{s^2}, \quad (6.29)$$

donde se ha definido el número de Reylnolds como $Re = 4/\Gamma_{vis1} = \rho_\infty \omega_o R_{o1}^2 / \mu_L$. Como muestra esta expresión, el movimiento vibracional de la burbuja pequeña está inducido

únicamente por las oscilaciones de la grande. Además, la amplitud de estas vibraciones decae con el cuadrado de la separación, lo cual queda plasmado en la Fig. 6.10. Bajo las condiciones paramétricas de nuestro problema, podemos estimar finalmente una amplitud $\sigma \simeq 3\varepsilon_2 R_{o2}^3/s^2$ y una fase $\phi_s \simeq \phi_2$

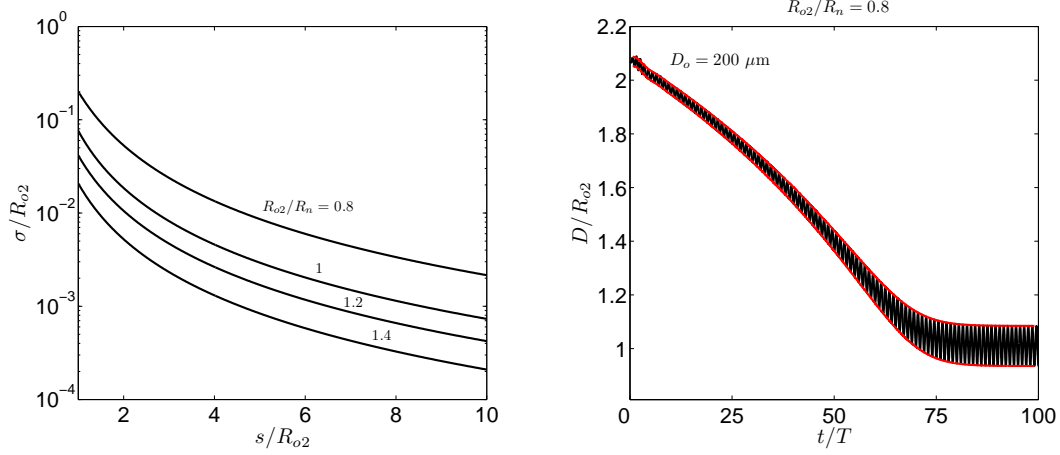


Figura 6.10: Izquierda: amplitud σ del movimiento vibracional de la burbuja pequeña ($R_{o1}/R_n = 0.2$) en función de la distancia de separación media s . El número de Reynolds correspondiente es $Re \simeq 100$. Derecha: envolvente de las vibraciones (en rojo) calculada analíticamente a partir de la solución numérica (en negro) para la traslación total de la burbuja pequeña.

Movimiento traslacional promedio

Con el fin realizar la operación de promediado temporal, linealizaremos los términos asociados a la dinámica oscilatoria y vibracional presentes en ecuación del movimiento de traslación (6.24) conservando términos de hasta segundo orden. Para tal propósito, asumiremos oscilaciones y vibraciones de pequeña amplitud, de manera que $R = R_o(1 + X)$ y $D = s + Y$, con $|X| \ll 1$ y $|Y| \ll s$ respectivamente. Veamos por separado la expresiones linealizadas y promediadas correspondientes a cada una de las fuerzas que actúan sobre la burbuja. En primer lugar, la linealización de la fuerza de radiación secundaria (6.17) nos lleva a

$$F_R = \frac{4}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{\ddot{X}_2 + 3X_1\ddot{X}_2 + 2X_2\ddot{X}_2 + 2\dot{X}_2^2}{s^2} - \frac{2R_{o2}^3\dot{X}_2^2}{s^5} \right). \quad (6.30)$$

Para efectuar la operación de promediado, consideraremos que la posición media s es constante durante un periodo de oscilación. Escribiendo únicamente los términos con promedio no nulo, llegamos a

$$\langle F_R \rangle = \frac{4}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{3\langle X_1\ddot{X}_2 \rangle + 2\langle X_2\ddot{X}_2 \rangle + 2\langle \dot{X}_2^2 \rangle}{s^2} - \frac{2R_{o2}^3\langle \dot{X}_2^2 \rangle}{s^5} \right). \quad (6.31)$$

Si asumimos oscilaciones de la forma $X = \varepsilon \cos(\phi - \omega_o t)$, se tiene que $\langle X_2\ddot{X}_2 \rangle = -\langle \dot{X}_2^2 \rangle$, con lo que el promedio de la fuerza de radiación secundaria finalmente resulta

$$\langle F_R \rangle = -2\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_{o1}^3 R_{o2}^3 \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{s^2} \cos(\phi_1 - \phi_2) - \frac{4}{3}\pi\rho_\infty\omega_o^2 R_{o1}^3 R_{o2}^6 \frac{\varepsilon_2^2}{s^5}. \quad (6.32)$$

Nótese que el primer término de esta expresión se corresponde con la definición clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes, F_B , para interacciones de corto alcance. El segundo término, el cual se corresponde con el promedio de la fuerza de radiación asociada a la onda cinética, F_K , aparece a modo de corrección. Podemos comprobar que, para pequeñas distancias de separación, estos dos términos son del mismo orden de magnitud. Efectivamente, si $s \sim R_{o2}$, tenemos que

$$\frac{F_B}{F_K} \sim \frac{\varepsilon_1 s^2}{\varepsilon_2 R_{o2}^2} \sim 1, \quad (6.33)$$

de manera que el término relativo a F_K deberá conservarse a la hora de resolver la dinámica traslacional promediada en las proximidades de la burbuja grande. Por otro lado, la fuerza de inercia virtual (6.18), linealizada hasta términos de segundo orden, se escribe

$$\begin{aligned} F_I = & -\frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 \left(a + \ddot{Y} + 3aX_1 + 3X_1\ddot{Y} \right) + \\ & + \frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{\ddot{X}_2 + 3X_1\ddot{X}_2 + 2X_2\ddot{X}_2 + 2\dot{X}_2^2}{s^2} - \frac{6vX_1\dot{X}_2 + 2\dot{X}_2\dot{Y}}{s^3} \right) - \\ & - 2\pi\rho_\infty R_{o1}^3 \left(v\dot{X}_1 + \dot{X}_1\dot{Y} + 2vX_1\dot{X}_1 \right) + 2\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{\dot{X}_1\dot{X}_2}{s^2} \right). \end{aligned} \quad (6.34)$$

Asumiendo unas velocidades v y aceleraciones a medias constantes a lo largo de un periodo de oscilación, el promedio de esta fuerza se puede plantear como

$$\begin{aligned} \langle F_I \rangle = & -\frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 \left(a + 3\langle X_1\ddot{Y} \rangle \right) + \\ & + \frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{3\langle X_1\ddot{X}_2 \rangle + 2\langle X_2\ddot{X}_2 \rangle + 2\langle \dot{X}_2^2 \rangle}{s^2} - \frac{6\langle vX_1\dot{X}_2 \rangle + 2\langle \dot{X}_2\dot{Y} \rangle}{s^3} \right) - \\ & - 2\pi\rho_\infty R_{o1}^3 \langle \dot{X}_1\dot{Y} \rangle + 2\pi\rho_\infty R_{o1}^3 R_{o2}^3 \left(\frac{\langle \dot{X}_1\dot{X}_2 \rangle}{s^2} \right). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Finalmente, considerando tanto oscilaciones como vibraciones monocromáticas de la forma $X = \varepsilon \cos(\phi - \omega_o t)$ y $Y = \sigma \cos(\phi_s - \omega_o t)$ respectivamente, la fuerza de inercia virtual promediada resulta

$$\begin{aligned} \langle F_I \rangle = & -\frac{2}{3}\pi\rho_\infty R_{o1}^3 a - \frac{2}{3}\pi\rho_\infty \omega_o^2 R_{o1}^3 R_{o2}^3 \frac{\varepsilon_2 \sigma}{s^3} \cos(\phi_2 - \phi_s) - \\ & - 2\pi\rho_\infty \omega_o R_{o1}^3 R_{o2}^3 v \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{s^3} \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Vemos que el primer término de esta expresión se corresponde con la inercia asociada al movimiento traslacional neto F_{It} de la burbuja. En cambio, el segundo término estará relacionado con la fuerza de inercia de las vibraciones F_{Iv} . Se puede demostrar que esta última componente es mucho más grande que las fuerzas convectivas F_c , representadas por el tercer término. Efectivamente, durante un ciclo del movimiento vibracional, se tiene $v \ll \omega_o \sigma$, con lo que

$$\frac{F_{Iv}}{F_c} \sim \frac{\omega_o \sigma}{v \varepsilon_1} \gg 1. \quad (6.37)$$

Se concluye, por tanto, que el término asociado a las fuerzas convectivas podrá despreciarse de la inercia total. Por último, la versión linealizada de la fuerza de resistencia viscosa (6.23) se expresa como

$$F_D = -12\pi\mu_L R_{o1} \left(v + \dot{Y} + vX_1 + X_1\dot{Y} \right) + 12\pi\mu_L R_{o1} R_{o2}^3 \left(\frac{\dot{X}_2 + X_1\dot{X}_2 + 2X_2\dot{X}_2}{s^2} \right), \quad (6.38)$$

cuyo promediado establece

$$\langle F_D \rangle = -12\pi\mu_L R_{o1} \left(v + \langle X_1\dot{Y} \rangle \right) + 12\pi\mu_L R_{o1} R_{o2}^3 \left(\frac{\langle X_1\dot{X}_2 \rangle}{s^2} \right), \quad (6.39)$$

habiéndose considerado una velocidad media constante durante el periodo de oscilación. Evaluando los promedios de la expresión anterior, llegamos finalmente a

$$\langle F_D \rangle = -12\pi\mu_L R_{o1} v - 6\pi\mu_L \omega_o R_{o1} \varepsilon_1 \sigma \sin(\phi_1 - \phi_s) + 6\pi\mu_L \omega_o R_{o1} R_{o2}^3 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{s^2} \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad (6.40)$$

resultado que representa las tres componentes de la resistencia viscosa total sobre la burbuja. Los términos hallados se corresponden, en este orden, con la resistencia debida al movimiento de traslación neto, F_{Dt} , al movimiento vibracional, F_{Dv} , y al arrastre provocado por el flujo potencial u_2 desarrollado alrededor de la burbuja grande, F_{D2} .

La ecuación diferencial que gobierna el movimiento traslacional promedio se construye haciendo $\langle F_R \rangle + \langle F_I \rangle + \langle F_D \rangle = 0$. Introduciendo en esta expresión todos los términos encontrados para cada una de las fuerzas promediadas (6.32), (6.36) y (6.40), podemos escribir

$$F_{It} + F_{Dt} = -F_B - F_K - F_{Iv} - F_{D2} - F_{Dv}. \quad (6.41)$$

A continuación, adimensionalizaremos la ecuación de movimiento (6.41) con las variables $\tilde{s} = s/R_{o2}$, $\tilde{\sigma} = \sigma/R_{o2}$, $\tilde{v} = vt_o/R_{o2}$ y $\tilde{a} = at_o^2/R_{o2}$, siendo $t_o = \rho_\infty R_{o1}^2/\mu_L$ el tiempo característico. La amplitud adimensional del movimiento vibracional será $\tilde{\sigma} = 3|\Omega|\varepsilon_2/\tilde{s}^2$, donde se ha definido el parámetro complejo $\Omega = (1 + 6iRe^{-1})/(1 + 18iRe^{-1})$. Así pues, substituyendo $\tilde{\sigma}$ en las distintas fuerzas donde aparece, se obtiene finalmente

$$\tilde{a} + 18\tilde{v} = -3Re^2 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\tilde{s}^2} \cos(\phi_1 - \phi_2) - Re^2 \frac{\varepsilon_2^2}{\tilde{s}^5} [2 + 3|\Omega| \cos(\phi_2 - \phi_s)] + 9Re \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\tilde{s}^2} [\sin(\phi_1 - \phi_2) - 3|\Omega| \sin(\phi_1 - \phi_s)], \quad (6.42)$$

donde el número de Reynolds es $Re = \rho_\infty \omega_o R_{o1}^2/\mu_L$. El primer término de la derecha de (6.42) se identifica con la definición clásica de la fuerza secundaria de Bjerknnes en su versión adimensional, la cual domina para valores elevados de Re y de la distancia de separación \tilde{s} . Este análisis nos ha permitido incorporar los efectos de otras fuerzas hidrodinámicas, con promedio no nulo, en el cálculo de la interacción entre pares de burbujas. Concluimos que, aunque la fuerza secundaria de Bjerknnes, según su definición, resulte atractiva, la fuerza de interacción podría ser repulsiva bajo determinadas circunstancias. Este fenómeno ha sido verificado de forma numérica y experimental en la Fig. 6.8 y Fig. 6.9.

Para investigar las posiciones de equilibrio \tilde{s}_* que aparecen en la interacción mutua entre las burbujas, hacemos simplemente $\tilde{v}_* = \tilde{a}_* = 0$ en la ecuación de movimiento promediada (6.42). De esta manera, se obtiene la siguiente ecuación algebraica

$$\tilde{s}_*^3 = \frac{\frac{1}{3}(\varepsilon_2/\varepsilon_1)[2 + 3|\Omega| \cos(\phi_2 - \phi_s)]}{3Re^{-1}[\sin(\phi_1 - \phi_2) - 3|\Omega| \sin(\phi_1 - \phi_s)] - \cos(\phi_1 - \phi_2)}, \quad (6.43)$$

la cual debe ser resuelta de manera iterativa teniendo en cuenta que las amplitudes y fases de las oscilaciones dependen asimismo de esta posición. No obstante, el desacoplamiento de las oscilaciones de la burbuja grande nos permite simplificar el cálculo tomando valores de ε_2 y ϕ_2 constantes. En la Fig. 6.11 hemos representado la curva de equilibrio obtenida a partir de la expresión (6.43). Como vemos, esta solución reproduce de forma cualitativa lo predicho por la formulación completa de la dinámica traslacional.

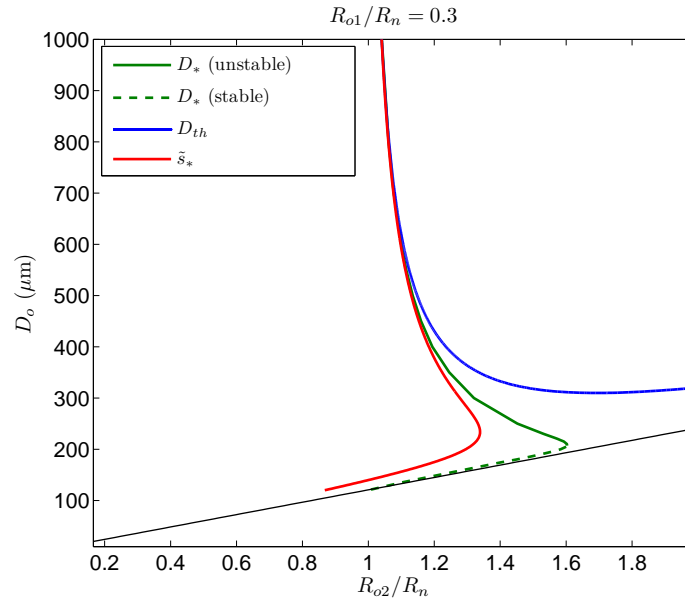


Figura 6.11: Naturaleza de la interacción mutua entre pares de burbujas. Posiciones de equilibrio calculadas mediante la teoría clásica de la fuerza secundaria de Bjerknes (D_{th}), la formulación completa para la dinámica traslacional (D_*), y la formulación para el movimiento de traslación promediado (s_*).

6.4. Fenómenos de *clustering* en nubes de microburbujas

Para concluir el estudio de la fenomenología asociada a las fuerzas de Bjerknes, en esta sección aplicaremos la formulación correspondiente de la dinámica de traslación promediada con el fin de obtener numéricamente la evolución en el tiempo de una nube de N burbujas excitada por una onda acústica plana. Consideraremos que el desplazamiento medio de cada burbuja dentro de la nube está inducido únicamente por la acción de las fuerzas primarias y secundarias de Bjerknes. De esta manera, el movimiento de la burbuja i se encuentra gobernado por

$$m_{ai}\mathbf{a}_i + 12\pi\mu_L R_{oi}\mathbf{v}_i = \mathbf{F}_{Bi}^{(1)} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{Bij}^{(2)}, \quad (6.44)$$

donde \mathbf{a}_i es el vector aceleración, \mathbf{v}_i es el vector velocidad, y $m_{ai} = 2\pi\rho_\infty R_{oi}^3/3$ la masa añadida de la burbuja.

Para resolver esta ecuación, implementaremos un algoritmo numérico basado en técnicas de resolución de problemas de dinámica molecular. Asumiremos que, en el instante inicial t_0 , la posición de cada burbuja dentro de la nube viene dada por $\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_{0i}$. Por otro lado, si las burbujas se encuentran en reposo, sus velocidades iniciales serán $\mathbf{v}_i(t_0) = 0$ m/s. El algoritmo se construye como sigue

- i) En el instante t_k se conocen las posiciones relativas $\mathbf{r}_i(t_k)$ de todas las burbujas, y por tanto, la presión acústica externa en sobre cada una, $p_a(\mathbf{r}_i(t_k), t_k)$.
- ii) Dada esta configuración espacial, se calculan las amplitudes $\varepsilon_i(t_k)$ y fases $\phi_i(t_k)$ de las oscilaciones de cada burbuja mediante la resolución del sistema de ecuaciones lineal para la dinámica acoplada (plantado en el Capítulo 5).
- iii) Una vez resuelto el problema de las oscilaciones acopladas, se procede a evaluar la fuerza primaria de Bjerknes, $\mathbf{F}_{Bi}^{(1)}(t_k)$, dada por la expresión (6.5), y la fuerza secundaria de Bjerknes, definida en (6.11), para todos los pares de burbujas presentes en la nube, $\mathbf{F}_{Bij}^{(2)}(t_k)$.
- iv) Usando un esquema de Euler, actualizaremos el vector velocidad para cada burbuja calculando la acción de estos dos campos de fuerzas durante un lapso de tiempo $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ lo suficientemente pequeño. Mediante una aproximación lineal, el vector aceleración se puede escribir $\mathbf{a}_i(t_{k+1}) \simeq [\mathbf{v}_i(t_{k+1}) - \mathbf{v}_i(t_k)]/\Delta t$. Substituyendo esta aceleración en la ecuación (6.44), obtenemos

$$\mathbf{v}_i(t_{k+1}) \simeq \mathbf{v}_i(t_k) + \left[\mathbf{F}_{Bi}^{(1)}(t_k) + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{Bij}^{(2)}(t_k) - 12\pi\mu_L R_{oi} \mathbf{v}_i(t_k) \right] \frac{\Delta t}{m_{ai}} \quad (6.45)$$

- v) Conocido el valor del vector velocidad en el instante t_{k+1} , podremos actualizar las posiciones de las burbujas dentro de la nube haciendo $\mathbf{r}_i(t_{k+1}) \simeq \mathbf{r}_i(t_k) + \mathbf{v}_i(t_{k+1})\Delta t$. Así pues, substituyendo la expresión (6.45), se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(t_{k+1}) \simeq & \mathbf{r}_i(t_k) + \mathbf{v}_i(t_k)\Delta t + \\ & + \left[\mathbf{F}_{Bi}^{(1)}(t_k) + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{F}_{Bij}^{(2)}(t_k) - 12\pi\mu_L R_{oi} \mathbf{v}_i(t_k) \right] \frac{(\Delta t)^2}{m_{ai}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

- vi) Obtenida la nueva configuración espacial de la nube de burbujas, se repetirá el algoritmo desde el punto i).

En la Fig. 6.12 se ha representado el instante inicial y final de la evolución de una nube monodispersa de 10 burbujas ante la excitación acústica creada por una onda plana monocromática propagándose a lo largo del eje z . Las burbujas, al ser todas mismo tamaño, oscilarán en fase, lo que provoca unas fuerzas de interacción atractivas entre ellas. Vemos, por tanto, cómo las burbujas tienden a agruparse primero por pares, y más tarde por racimos (*clustering*), a medida que actúa la excitación. Este fenómeno, aplicado sobre poblaciones de microburbujas de contraste, puede ser de gran interés

para el control y guiado de portadores de fármacos (*drug delivery*) en el tratamiento de diversas patologías. Sin embargo, en algunas situaciones, la formación descontrolada de agrupaciones puede causar una drástica pérdida de la información proveniente del ultrasonido durante la diagnosis, y en un escenario más grave, la obstrucción de capilares sanguíneos, lo que puede llevar a un embolismo gaseoso. Por tanto, el análisis de las interacciones entre burbujas y la dinámica de agrupaciones es esencial para controlar la aparición de este tipo de fenómenos.

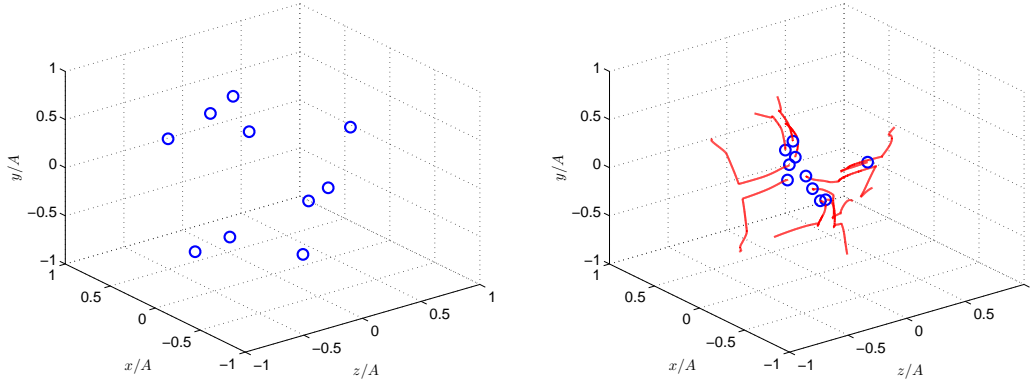


Figura 6.12: Instante inicial ($\beta = 10^{-2.5}$) y final de la configuración de una nube de 10 burbujas monodispersas ($R_o = 3 \mu\text{m}$) excitada por una onda acústica plana de amplitud $P_a = 5 \text{ kPa}$ y frecuencia $f_o = 1 \text{ MHz}$. Las curvas rojas representan las trayectorias seguidas por cada burbuja.

6.5. Conclusiones

Las fuerzas de interacción entre las burbujas que componen una nube excitada acústicamente han sido analizadas en el presente capítulo. En primer lugar, se ha revisado la formulación correspondiente a la teoría clásica de las fuerzas de Bjerkenes, estudiando el origen de estas interacciones a partir de la definición de las fuerzas de radiación. Hemos visto cómo los efectos de acoplamiento entre burbujas y los efectos de largo alcance pueden afectar, tanto de forma cuantitativa como cualitativa, a la naturaleza atractiva o repulsiva de las fuerzas secundarias de Bjerkenes. En segundo lugar, se ha analizado la interacción mutua entre pares de burbujas a partir de la formulación completa para la dinámica traslacional. De esta manera, se ha podido calcular la evolución de la distancia de separación entre dos burbujas, caracterizando de forma numérica la naturaleza de la fuerza de interacción. Los resultados obtenidos han sido comparados con la teoría clásica de Bjerkenes, y con los experimentos realizados por Yoshida et al. (2011). Como hemos visto, estos resultados numéricos logran captar el fenómeno de reversión del signo de la interacción, el cual se produce cuando la separación entre ambas burbujas es muy pequeña. Así pues, con el fin de explicar este hecho, se ha desacoplado la dinámica vibracional de la dinámica traslacional promediada, planteando las ecuaciones que las gobiernan. Las ecuaciones de movimiento obtenidas ponen de manifiesto que esta reversión del signo puede ser debida a la acción no despreciable de las fuerzas hidrodinámicas provocadas por el efecto neto del flujo potencial creado en las inmediaciones de las burbujas.

Bibliografía

- [Bjerknes (1906)] V.F.K. Bjerknes, *Fields of Force*, Columbia University Press, New York, 1906
- [Blake (1949)] F.G. Blake, “Bjerknes forces in stationary sound fields.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 21, pp. 551 – 560 (1949)
- [Elder (1959)] S. Elder, “Cavitation microstreaming.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, pp. 54 – 64 (1959)
- [Eller (1968)] A. Eller, “Force on a bubble in a standing acoustic wave.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 43, pp. 170 – 171 (1968)
- [Crum (1975)] L. Crum, “Bjerknes forces on bubbles in a stationary sound field.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 57, pp. 1363 – 1370 (1975)
- [Maxey (1983)] M. Maxey & J. Riley, “Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow.” *Phys. Fluids*, vol. 26, pp. 883 – 889 (1983)
- [Zabolotskaya (1984)] E. Zabolotskaya, “Interaction of gas bubbles in a sound field.” *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 30, pp. 365 – 368 (1984)
- [Leighton (1994)] T.G. Leighton, *The acoustic bubble*, Academic Press, London, 1994
- [Doinikov (1995)] A. Doinikov & S. Zavtrak, “On the mutual interaction of two gas bubbles in a sound field.” *Phys. Fluids*, vol. 7(8), pp. 1923 – 1930 (1995)
- [Doinikov (1997)] A. Doinikov & S. Zavtrak, “Radiation forces between two bubbles in a compressible liquid.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 102(3), pp. 1424 – 1431 (1997)
- [Magnaudet (1998)] J. Magnaudet & D. Legendre, “The viscous drag force on a spherical bubble with a time-dependent radius.” *Phys. Fluids*, vol. 10, pp. 550 – 554 (1998)
- [Barbat (1999)] T. Barbat, N. Ashgriz & C.S. Liu, “Dynamics of two interacting bubbles in an acoustic field.” *J. Fluid Mech.*, vol. 389, pp. 137 – 168 (1999)
- [Doinikov (1999)] A. Doinikov, “Bjerknes forces between two bubbles in a viscous fluid.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 106, pp. 3305 – 3312 (2011)
- [Harkin (2001)] A. Harkin, T.J. Kaper, & A. Nadim, “Coupled pulsation and traslation of two gas bubbles in a liquid.” *J. Fluid Mech.*, vol. 445, pp. 377 – 411 (1999)
- [Reddy (2002)] A.J. Reddy & A. Szeri, “Coupled dynamics of translation and collapse of acoustically driven microbubbles.” *J. Acous. Soc. Am.*, vol. 112, pp. 1346 – 1352 (2006)
- [Ida (2002)] M. Ida, “A charateristic frequency of two mutually interacting gas bubbles in an acoustic field.” *Phys. Lett. A*, vol. 297, pp. 210 – 217 (2002)
- [Ida (2005)] M. Ida, “Phase properties and interaction force of acoustically interacting bubbles: a complementary study of the transition frequency.” *Phys. Fluids*, vol. 17, pp. 97 – 107 (2005)

- [Pelekasis (2004)] N. Pelekasis, A. Gaki, A. Doinikov & J. Tsamopoulos, “Secondary Bjerknes forces between two bubbles and the phenomenon of acoustic streamers.” *J. Fluid Mech.*, vol. 500, pp. 313 – 347 (2004)
- [Marmottant (2006)] P. Marmottant, M. Versluis, N. de Jong, S. Hilgenfeldt & D. Lohse, “High-speed imaging of an ultrasound-driven bubble in contact with a wall: Narcissus effect and resolved acoustic streaming.” *Exp. Fluids*, vol. 41, pp. 147 – 153 (2006)
- [Tho (2007)] P. Tho, R. Manasseh & A. Ooi, “Cavitation microstreaming patterns in single and multiple bubble systems.” *J. Fluid Mech.*, vol. 576, pp. 191 – 233 (2007)
- [Toilliez (2008)] J. Toilliez & J. Szeri, “Optimized translation of microbubbles driven by acoustic fields.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 123(4), pp. 1916 – 1930 (1997)
- [Yoshida (2011)] K. Yoshida, T. Fujikawa & Y. Watanabe, “Experimental investigation on reversal of secondary Bjerknes force between two bubbles in ultrasonic standing wave.” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 130(1), pp. 135 – 144 (2011)

Conclusiones

La elaboración de esta tesis se enmarca dentro de los objetivos del Proyecto del Plan Nacional de I+D+i *Mecanismos de generación de microgotas, burbujas y espumas con aplicaciones a procesos industriales, farmacología y medicina*. El resumen de dicho proyecto establece:

- i) Mejorar nuestro entendimiento de los mecanismos físicos básicos de generación de gotas, burbujas y espumas,
- ii) Estudiar la dispersión acústica múltiple en nubes de burbujas monodispersas, y
- iii) Usar parte del conocimiento básico adquirido en i) y ii) para diseñar nuevos dispositivos de generación de agentes de contraste ultrasónicos (UCA) de uso diagnóstico, y microemulsiones con aplicaciones en la industria farmacéutica.

Estos resultados guiarán la construcción de nuevos dispositivos que mejorarán algunos de los procesos de producción usados en las industrias farmacéutica, alimentaria o cosmética, o en ciencia de materiales. En concreto uno de los objetivos más ambiciosos del proyecto es el desarrollo de una técnica eficiente para medir la presión absoluta en un líquido mediante el análisis de la señal acústica dispersada por una nube de burbujas con tamaños en el rango micrométrico. Alcanzar este objetivo involucra las siguientes tareas: (a) la generación de burbujas monodispersas con tamaños por debajo de las 10 micras, (b) inhibir la disolución del gas en el líquido añadiendo un fosfolípido o una capa polimérica a la superficie de las burbujas, (c) diseñar un procedimiento para la producción en masa de este tipo de burbujas monodispersas, (d) caracterizar la dispersión del sonido de una nube de burbujas monodispersas. Así pues, elaboraremos las conclusiones de este trabajo de investigación basándonos en los resultados obtenidos, los cuales parten del desarrollo de los objetivos y tareas planteadas.

Con el fin de analizar la aplicabilidad de la formulación básica relativa a la propagación de ondas, se ha llevado a cabo el cálculo y simulación de fenómenos como la radiación acústica generada por un transductor, o la dispersión acústica y refracción por esferas fluidas homogéneas (Capítulo 2). Los resultados correspondientes al estudio de la propagación de haces acústicos en medios homogéneos revelan que la dispersión por regiones esféricas con unas determinadas propiedades, puede dar lugar a un efecto de enfoque. Es decir, esta región se puede comportar como una lente acústica. Analizando estos resultados concluimos que la posición focal y la ganancia en presiones dependen fuertemente de la anchura de la irradiación sobre la esfera (publicado como Miguel A. Parrales et al. “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: focusing effect and refraction.” *American Journal of Physics*, vol. 79(4), pp. 401 – 410, 2011).

Una vez familiarizados con los distintos fenómenos ondulatorios que aparecen en la interacción sonido-objeto, se ha procedido a analizar la dinámica de burbujas con el fin de establecer las bases físicas y teóricas de la interacción ultrasonido-microburbuja (Capítulo 3). Como resultado, se ha obtenido un umbral de comportamiento no lineal de las burbujas. Este umbral predice a partir de qué presiones acústicas una burbuja oscila de forma no lineal bajo una excitación de una determinada frecuencia. Este resultado es útil a la hora de seleccionar el voltaje a aplicar sobre el transductor piezoeléctrico en los distintos montajes experimentales. Por otro lado, se ha logrado la producción masiva de microburbujas monodispersas recubiertas por fosfolípidos usando técnicas microfluídicas (Capítulo 4). Las medidas experimentales del espectro de atenuación en suspensiones de microburbujas encapsuladas muestran que el uso de burbujas monodispersas mejora las técnicas de caracterización acústica de agentes de contraste. En consecuencia, se han podido estimar las propiedades de los recubrimientos de fosfolípidos de forma más precisa, revelando que son sensibles al tamaño de equilibrio de las microburbujas (Miguel A. Parrales et al. “Acoustic characterization of monodisperse lipid-coated microbubbles: relationship between size and shell viscoelastic properties.”, *In preparation*, 2013).

Conocido el comportamiento de las microburbujas ante excitaciones acústicas, se ha elaborado un análisis de los fenómenos colectivos presentes en nubes de burbujas monodispersas (Capítulo 5). Los resultados más relevantes en el análisis de la dinámica acoplada y dispersión múltiple ponen de manifiesto la importancia de la compresibilidad del medio en el cálculo de los modos y frecuencias resonantes de una nube. Para ello, se ha elaborado un mapa de dispersión total que predice la localización de los modos propios de una nube esférica en el espectro de frecuencias. En consecuencia, se han obtenido numérica y teóricamente unas frecuencias propias que corrigen las calculadas por las teorías clásicas (Miguel A. Parrales et al. “Mapping the acoustic scattering behavior of spherical microbubble clouds.” *65th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. California, San Diego, Estados Unidos de America, 2012).

Finalmente, los resultados obtenidos en el análisis de las fuerzas de Bjerknes y de la interacción mutua entre pares de burbujas (Capítulo 6) captan y explican los fenómenos de *clustering* por un lado, y la “reversión del signo” de la interacción por otro, efecto que ocurre para distancias de separación muy pequeñas: según nuestro planteamiento, la fuerza de repulsión que se observa experimentalmente, y que no predice la formulación clásica, puede ser debida al efecto neto o promedio del flujo potencial desarrollado en las inmediaciones de cada burbuja.

Conclusions

The elaboration of this thesis is framed within the objectives of the R+D National Project *Mechanisms of generation of micron-sized drops and bubbles with applications to industrial processes, pharmacology and medicine*. The summary of the project sets:

- i) To deepen in our understanding of the basic physical mechanisms of generation of drops, bubbles and foams
- ii) To study the multiple scattering of bubble clouds composed by monodisperse microbubbles and
- iii) To use part of the acquired basic knowledge of i) and ii) to design new devices for the generation of ultrasound contrast agents (UCAs) with diagnostic purposes and microemulsions with applications in pharmaceutical industry.

Some of these results will guide the building of new devices that will improve the performance of some of the production processes followed in pharmaceutical, alimentary or cosmetic industries or material science. In particular, one of the most ambitious objective is to develop an effective technique to measure the absolute pressure of a liquid by analyzing the acoustic signal scattered by a cloud of bubbles with sizes in the micrometer range. The achievement of this objective involves the following tasks: (a) the generation of monodisperse bubbles with sizes below 10 microns, (b) to inhibit the dissolution of the gas into the carrier fluid by adding a phospholipid or polymer shell to the bubble interface, (c) to design a procedure for the mass production of these types of monodisperse microbubbles, (d) to characterize the sound scattering of a monodisperse bubble cloud. Therefore, we write the conclusions of this research by analyzing the obtained results, which are driven by the development of the proposed tasks and objectives previously defined.

In order to analyze the applicability of the basic formulation on wave propagation, we have carried out the calculation and simulation of such phenomena as the acoustic radiation from a transducer, and the acoustic scattering and refraction by homogeneous fluid spheres (Chapter 2). The study concerning the acoustic beam propagation in homogeneous media shows that the scattering from spherical regions can lead to a focusing effect. That is, this region may behave as an acoustic lens. By analyzing these results, we conclude that the focal position and the pressure gain strongly depend on the irradiation width over the spherical lens (published as Miguel A. Parrales et al. “Acoustic scattering from a spherical lens irradiated by a finite transducer: focusing effect and refraction.” *American Journal of Physic.*, vol. 79(4), pp. 401 – 410, 2011).

Once familiar with the various wave phenomena which appear in sound-object interactions, we proceeded to analyze the bubble dynamics in order to establish the physical

and theoretical basis for ultrasound-microbubble interactions (Chapter 3). As a result, we have obtained a nonlinear behavior threshold for the bubbles. This threshold predicts the limit acoustic pressure that induces the bubble to oscillate non-linearly. This result is useful in selecting the voltage applied to the piezoelectric transducer in the different experimental setups proposed in this work. Furthermore, the massive production of monodisperse lipid-coated microbubbles has been achieved by using microfluidic techniques (Chapter 4). The experimental measurements of the attenuation spectrum, show that using monodisperse microbubbles improves the acoustic characterization techniques for contrast agents. Accordingly, it has been possible an accurate estimation of the viscoelastic parameters of the phospholipid coatings, thus revealing that such properties are sensitive to the equilibrium size of the microbubbles (Miguel A. Parrales et al. “Acoustic characterization of monodisperse lipid-coated microbubbles: relationship between size and shell viscoelastic properties.”, *In preparation*, 2013).

On the other hand, knowing the behavior of the microbubbles while driven by an acoustic excitation, allows a deep analysis of the collective phenomena that take place within a monodisperse cloud (Chapter 5). The most relevant results concerning the study of the coupled dynamics and multiple scattering, reveal the key role of the fluid compressibility in the calculation of the cloud resonant modes and the eigenfrequencies. In consequence, we have built a complete scattering map which predicts the eigenmodes location in the frequency spectrum of a spherical bubble cloud. In conclusion, we have calculated numerically and theoretically a new set of eigenfrequencies that corrects the ones obtained by classical theories (Miguel A. Parrales et al. “Mapping the acoustic scattering behavior of spherical microbubble clouds.” *65th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics*. California, San Diego, Estados Unidos de America, 2012).

Finally, the results on the Bjerknes forces analysis and the mutual interaction between bubbles (Chapter 6) are able to capture and explain the clustering phenomena, and the interaction sign reversal that occurs for very small separation distances: according to our approach, the experimentally observed repulsive force, which is not predicted by the classical formulation, may be due to the average effect of the potential flow developed in the vicinity of each bubble.